

# مقدمه ناشر

قطعاً بیشترین علامت‌هایی که در درس‌های ریاضی (به خصوص حسابان) دیده می‌شد ایناست:  $=$ ،  $\neq$ ،  $>$  و  $<$ . یه جورایی می‌شه گفت ریاضی بیشتر دنبال اینه که بگه چی با چی مساویه، چی با چی مساوی نیست. تساوی‌های مطلق ریاضی، دقیق و براساس منطق جبریه و مولای درزش نمی‌ره. به نظرم یکی از چیزایی که ریاضی رو جذاب کرده، همینیه که برابریش واقعاً برابریه! اما تساوی بازی‌ها، تساوی حقوق آدم‌ها، تساوی همگان در برابر قانون و ...!

برابری‌هایی که خیلی وقتا برابر نیستند! مثلاً می‌بینید که دو تیم با هم مساوی می‌کنن ولی یکیشون حذف می‌شه. اون یکی می‌ره مرحله بعد. می‌گن بازی با تساوی به پایان رسید ولی به دلیل گل زده بیشتر در خانه حریف، فلان تیم می‌ره مرحله بعد! خب پس در واقع منظورشون اینه که این بازی مساوی، مساوی نشده! داوری و ناداوری و سلیقه شخصی و ... رو هم اضافه کنید به این داستان. از این مثال تو بازی‌ها و مسابقات فراونه. اوضاع توی تساوی آدم‌ها و حق و حقوقشون خیلی پیچیده‌تر و عجیب‌تره؛ به قول جورج اورول در کتاب قلعه حیوانات (که کتابی بس جذاب است):

**all animals are equal but some animals are more equal than others!**

بی‌خیال تا گیح‌تر نشدم بریم سر همون ریاضی خودمون که لااقل راست و حسینی مساویش مساویه، نامساویش هم نامساوی! ممنونم از مؤلفای بی‌نظیرمون که با نوشتن این کتاب فرصتی برای موفقیت بیشتر علاقمندان به ریاضی فراهم کردند.

ممنونم از آقای محسن فراهانی عزیز که برای آماده‌شدن این کتاب واقعاً جنگید.

ممنونم از خانم زهرا خردمند به خاطر زحماتی که برای این کتاب کشیدند.

ممنونم از ویراستاران خوبمون که می‌دونم تمام تلاششون رو کردن تا کتاب بی‌غلط بشه.

ممنونم از تیم منسجم و منظم تولیدمون که در خاورمیانه هم‌تا ندارن!

ما دوستتون داریم < آن‌چه شما فکر می‌کنید

# تقدیم به همه دانش آموزان و معلم های خوب ایران

## مقدمه مولفان

به کتاب حسابان ۲ خیلی سبز خوش آمدید.

### نحوه استفاده از کتاب:

**الف)** اگر به مدرسه یا کلاس می‌روید در مورد استفاده از کتاب حتماً از معلمان بپرسید. ما به شدت اعتقاد داریم که «درس معلم زمزمه محبت و موفقیت است»، پس از معلمان در مورد ترتیب خواندن درس‌نامه‌ها و حل کردن تست‌ها و بررسی پاسخ‌ها، کمک بگیرید.

**ب)** اگر به شکل خودآموز از کتاب استفاده می‌کنید توصیه ما این است که: **۱)** اول درس‌نامه را خوب و کامل بخوانید. **۲)** چیزهایی که از درس‌نامه مهم است مشخص کنید یا برای خودتان یادداشت بردارید و خلاصه کنید. **۳)** یک بار دیگر فقط تست‌های درس‌نامه را حل کنید. **۴)** بروید سراغ تست‌ها، پاسخ تست‌ها را اول از پاسخ‌نامه کلیدی چک کنید و بعد بروید پاسخ‌ها را بخوانید. خیلی از وقت‌ها خواندن پاسخ تست‌هایی که درست حل کرده‌اید هم بسیار کمکتان می‌کند.

### ساختار کتاب:

**۱)** فصل‌های کتاب، به ترتیب فصل‌های حسابان ۲ (دوازدهم) آمده‌اند. در اول هر فصل مباحث مهم و پرسؤال و مباحث پیش‌نیاز را آورده‌ایم. حواستان باشد که وقتی می‌گوییم پیش‌نیاز منظورمان این است که بهتر است روش‌های اصلی و مطالب بنیادی مباحث پیش‌نیاز را قبل از خواندن فصل مورد نظر بلد باشید. ممکن است لازم باشد مباحث پیش‌نیاز را از مطالب کتاب‌های سال‌های پیش یاد بگیرید.

**۲)** در تست‌های هر درس، کنار تست‌های عادی یک آیکن (⊙) گذاشته‌ایم. قرار است شما بعد از حل تست‌ها و بررسی پاسخ‌نامه این آیکن‌ها را به 😊 یا 😐 یا ☹ تبدیل کنید:

😊 یعنی تست آسان      😐 یعنی تست متوسط      ☹ یعنی تست دشوار

این نمادگذاری باعث می‌شود تا بعداً که خواستید فصل را دوره کنید بتوانید تصمیم بگیرید که از کدام تست‌ها برای دوره استفاده کنید و روی سؤال‌ها با نماد مورد نظر تمرکز کنید تا خوب یادشان بگیرید. (البته برای این‌ها از هر نماد دیگری هم که خودتان می‌خواهید می‌توانید استفاده کنید چون هدف اصلی این است که بتوانید بعداً به این سؤال‌ها برگردید) برای بعضی از تست‌ها هم نماد ⊙ داریم که نشان‌دهنده تست‌های دشوار است. این تست‌ها مختص دانش‌آموزان علاقه‌مند است و قرار نیست همه دانش‌آموزان به این تست‌ها پاسخ دهند.

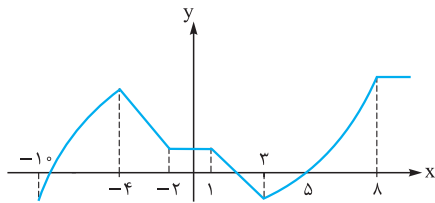
**۳)** نماد کنار بعضی از تست‌ها به رنگ آبی (⊙) آمده است. این‌ها تست‌های نشان‌دار هستند برای دوره سریع فصل و دوتا کاربرد دارند: **الف)** دوره و جمع‌بندی فصل **ب)** اگر قبل از یک آزمون وقت خیلی کمی دارید می‌توانید فقط این تست‌ها را حل کنید. ما معتقدیم که جمع‌بندی واقعی با این روش انجام می‌شود نه با جدول، نمودار و ...

**۴)** در تست‌ها کامنت‌هایی به رنگ آبی می‌بینید. این‌ها صرفاً برای یک یادآوری ساده مطالب درس‌نامه یا یک اشاره کوچک به استراتژی حل تست است. کامنت‌ها را با فونت ریز و کم‌رنگ آورده‌ایم که اگر نخواستید برای بار اول حل تست‌ها از رویشان رد شوید.

# فهرست

تست	درس نامه		
۳۳	۸	درس ۱: تبدیل نمودارها	<b>فصل اول</b> <b>تابع</b>
۴۰	۱۶	درس ۲: توابع چندجمله‌ای	
۴۲	۱۹	درس ۳: توابع یکنوا	
۴۶	۲۶	درس ۴: تقسیم	
۷۵	۵۲	درس ۱: توابع متناوب	<b>فصل دوم</b> <b>مثلثات</b>
۷۷	۵۵	درس ۲: نمودار توابع سینوسی و کسینوسی	
۸۱	۵۹	درس ۳: تانژانت	
۸۶	۶۶	درس ۴: معادله مثلثاتی	
۱۱۲	۹۳	درس ۱: حد بی‌نهایت	<b>فصل سوم</b> <b>حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت</b>
۱۱۶	۹۹	درس ۲: حد در بی‌نهایت	
۱۲۲	۱۰۵	درس ۳: مجانب	
۱۷۰	۱۲۹	درس ۱: آشنایی با مفهوم مشتق	<b>فصل چهارم</b> <b>مشتق</b>
۱۷۲	۱۳۴	درس ۲: قواعد مشتق‌گیری	
۱۷۸	۱۴۱	درس ۳: مشتق‌گیری با چشم‌های باز (عامل صفرشونده - ساده‌کردن)	
۱۸۱	۱۴۶	درس ۴: معادله خط مماس بر منحنی	
۱۸۴	۱۴۹	درس ۵: مشتق چپ و راست - مشتق‌گیری در حضور براکت و قدرمطلق	
۱۸۶	۱۵۳	درس ۶: پیوستگی و مشتق‌پذیری (در نقطه و بازه)	
۱۸۸	۱۵۵	درس ۷: نقاط مشتق‌ناپذیر - نقاط گوشه‌ای - مماس قائم	
۱۹۲	۱۶۰	درس ۸: دامنه و نمودار تابع مشتق	
۱۹۴	۱۶۳	درس ۹: مشتق تابع مرکب	
۱۹۹	۱۶۷	درس ۱۰: آهنگ تغییر	
۲۳۸	۲۰۲	درس ۱: بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق	<b>فصل پنجم</b> <b>کاربردهای مشتق</b>
۲۴۰	۲۰۶	درس ۲: نقطه بحرانی	
۲۴۳	۲۱۰	درس ۳: اکسترم‌های نسبی	
۲۴۶	۲۱۶	درس ۴: اکسترم‌های مطلق	
۲۴۸	۲۱۹	درس ۵: بهینه‌سازی	
۲۵۲	۲۲۳	درس ۶: تقعر و نقطه عطف	
۲۵۹	۲۳۳	درس ۷: رسم نمودار	
۲۶۴			<b>پاسخ‌نامه تشریحی</b>
۴۵۳			<b>پاسخ‌نامه کلیدی</b>

## درس سوم توابع یکنوا



نمودار روبه‌رو را ببینید:

- هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار  $y$  افزایش پیدا کند (یا نمودار رو به بالا برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی** اکید است.  
مثلاً بازه‌های  $[-1, 0]$  و  $[3, 8]$  در نمودار روبه‌رو.
- هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار  $y$  کاهش پیدا کند (یا نمودار رو به پایین برود)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی** اکید است.  
مثلاً بازه‌های  $[-4, -2]$  و  $[1, 3]$  در نمودار بالا.

**نکته** اگر تابعی در بازه‌ای **صعودی** اکید یا **نزولی** اکید باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه **یکنوا** اکید است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های  $[-1, 0]$ ،  $[-4, -2]$ ،  $[1, 3]$  و  $[3, 8]$ ، یکنوا اکید است.  
صعودی اکید    نزولی اکید    نزولی اکید    صعودی اکید

- هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار  $y$  افزایش پیدا کند یا ثابت بماند (نمودار رو به بالا یا ثابت باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **صعودی** است. مثلاً بازه‌های  $[-1, 0]$  و  $[3, +\infty)$  در نمودار بالا.
- هر وقت با حرکت روی نمودار در یک بازه، مقدار  $y$  کاهش پیدا کند یا ثابت بماند (نمودار رو به پایین یا ثابت باشد)، می‌گوییم تابع در آن بازه **نزولی** است. مثلاً بازه‌های  $[-4, 3]$  و  $[8, +\infty)$  در نمودار بالا.

**نکته** اگر تابعی در بازه‌ای **صعودی** یا **نزولی** باشد، می‌گوییم تابع در آن بازه **یکنوا** است.

مثلاً نمودار رسم‌شده در بازه‌های  $[-1, 0]$ ،  $[-4, 3]$  و  $[3, +\infty)$  یکنوا است.  
صعودی    نزولی    صعودی

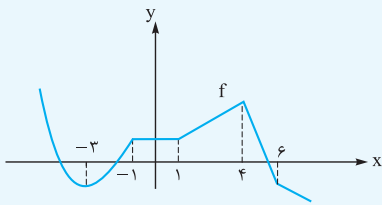
- اشاره** در تعریف تابع صعودی، در جمله «مقدار  $y$  افزایش پیدا کند یا ثابت بماند» به کلمه «یا» دقت کنید؛ یعنی هر کدامش اتفاق بیفتد، صعودی است. حتی اگر فقط یک خط افقی باشد. (برای تابع نزولی، عکس همین جمله)
- اگر در بازه‌ای، نمودارمان یک خط افقی باشد، تابع در آن بازه ثابت است. مثلاً بازه‌های  $[-2, 1]$  و  $[8, +\infty)$  در نمودار بالا.

**نکته** تابع ثابت تنها تابعی است که هم صعودی محسوب می‌شود و هم نزولی. پس اگر گفتند «تابع  $f(x) = \sqrt{x}$ ، تابعی صعودی و نزولی است»، جمله درستی است.

- اشاره** فرق بین «صعودی» و «صعودی اکید» در آن است که صعودی اکید فقط نمودار رو به بالا حرکت می‌کند ولی در صعودی، تابع می‌تواند هم رو به بالا برود و هم ثابت بماند (فقط حق ندارد رو به پایین برود). پس می‌توانیم نتیجه بگیریم «هم صعودی اکیدی، حتماً صعودی هم است» ولی عکسش درست نیست.
- اگر در بازه‌ای، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی از آن نزولی اکید باشد، تابع در آن بازه **غیر یکنوا** است. مثلاً تابع رسم‌شده در بازه  $[-6, -3]$  غیر یکنواست، چون در بازه  $[-6, -4]$  صعودی اکید و در بازه  $[-4, -3]$  نزولی اکید است.

در جدول زیر خلاصه مطالب صفحه قبل را ببینید: **جمع‌بندی**

تعریف ریاضی	مثال نموداری	وضعیت نمودار	نوع یکنوایی	
$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$		فقط رو به بالا می‌رود.	صعودی اکید	یکنوا اکید
$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$		فقط رو به پایین می‌رود.	نزولی اکید	
$a > b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$		یا رو به بالا می‌رود یا ثابت است.	صعودی	یکنوا
$a > b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$		یا رو به پایین می‌رود یا ثابت است.	نزولی	
$a, b \in D_f \Rightarrow f(a) = f(b)$		روی یک خط افقی است.	ثابت	غیریکنوا
		قسمتی رو به بالا و قسمتی رو به پایین	غیریکنوا	



آزمون ۱ با توجه به نمودار رسم‌شده، چه تعداد از جملات زیر درست است؟

الف)  $f$  در بازه  $[-3, 4]$  صعودی است.

ب)  $f$  در بازه  $[5, 9]$  یکنوا اکید است.

پ)  $f$  در بازه  $[-1, 1]$  هم صعودی است و هم نزولی.

ت)  $f$  در بازه  $[2, 5]$  غیریکنوا است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ ۴ همه جملات را بررسی می‌کنیم.

الف) چون نمودار در این بازه یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است.

ب) در بازه  $[5, 9]$  نمودار فقط رو به پایین رفته، پس نزولی اکید است. تابعی که نزولی اکید است، یکنوا اکید هم می‌باشد.

پ) در بازه  $[-1, 1]$  تابع ثابت می‌باشد پس هم صعودی هم نزولی است.

ت) در بازه  $[2, 5]$ ، قسمتی از نمودار صعودی اکید و قسمتی نزولی اکید است، پس غیریکنواست.

پس هر ۴ جمله درست بودند.

### بررسی یکنوایی توابع (به کمک ضابطه)

در جدول زیر معروف‌ترین توابع یکنوا آورده شده‌اند.

اسم تابع	ضابطه	شرط اکیداً صعودی بودن	شرط اکیداً نزولی بودن
خطی	$y = mx + h$	$m > 0$	$m < 0$
درجه ۳	$y = a(x + \alpha)^2 + \beta$	$a > 0$	$a < 0$
رادیکالی	$y = \sqrt{ax + b} + c$	$a > 0$	$a < 0$
نمایی	$y = a^x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
لگاریتمی	$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
آبشاری	$y =  x - a  -  x - b $	$b \geq a$ (صعودی)	$a \geq b$ (نزولی)

آشاره ۱۳ تابع آبشاری، اکیداً یکنوا نیست، بلکه فقط یکنوا است.

آزمون ۱ اگر تابع  $f(x) = (4 - a^2)x + a - 1$  و  $g(x) = \sqrt{(2a - 1)x + 3} - a$  توابعی اکیداً صعودی باشند، محدوده کامل  $a$  کدام است؟

۱)  $\frac{1}{3} < a < 2$       ۲)  $\frac{1}{3} \leq a < 1$       ۳)  $0 < a < \frac{1}{3}$       ۴)  $-2 < a < \frac{1}{3}$

پاسخ ۱)  $f$  تابعی خطی است، برای اکیداً صعودی بودن باید شیبش مثبت باشد:  $4 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$

۲)  $g$  تابعی رادیکالی به فرم  $y = \sqrt{Ax + B} + C$  است. برای اکیداً صعودی بودن باید ضریب  $x$  مثبت باشد:  $2a - 1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$

بین شرط (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:  $\Rightarrow (1) \cap (2) = (\frac{1}{2}, 2)$

**آزمون ۱۴** تابع  $f(x) = \left(\frac{a}{3} - 2\right)^{-x}$  یک تابع صعودی است.  $a$  چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$f(x) = \left(\frac{a}{3} - 2\right)^{-x} = \left(\frac{a-6}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{a-6}\right)^x$$

**پاسخ ۱۳** ابتدا ضابطه را به شکل  $y = A^x$  درمی‌آوریم:

برای آن که  $f$  صعودی باشد (دقت کنید نگفته  $f$  نامیبه و کلمه اکیداً هم نیامده)، پس  $\frac{3}{a-6}$  باید بزرگ‌تر یا مساوی ۱ باشد. (اگر بزرگ‌تر از ۱ باشد، تابع نمایی اکیداً

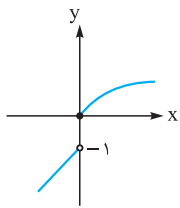
$$\frac{3}{a-6} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{a-6} - 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{3-a+6}{a-6} \geq 0 \Rightarrow \frac{-a+9}{a-6} \geq 0 \xrightarrow{\times(-1)} \frac{a-9}{a-6} \leq 0 \quad (\text{صعودی و اگر ۱ باشد، تابع ثابت } y=1 \text{ می‌شود.})$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c|c} & 6 & 9 & & \\ \hline & + & - & + & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\leq} 6 < a \leq 9$$

پس مقادیر صحیح  $a$ ، سه عدد ۷، ۸ و ۹ هستند.

### بررسی یکنوایی توابع (به کمک رسم نمودار)

خیلی وقت‌ها تشخیص یکنوایی از روی ضابطه کار سختی است. در این صورت باید سراغ رسم نمودار برویم.



**مثلاً** تابع  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$  را در نظر بگیرید. نمودارش را رسم می‌کنیم:

همان‌طور که معلوم است وقتی روی نمودار از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا می‌رود، پس تابع ما یک تابع اکیداً صعودی است.

**آشاره ۱۳** برای جواب‌دادن به سوالات این قسمت باید نمودار توابع معروف را بلد باشید.

**آزمون ۱۵** کدام گزینه یک تابع اکیداً یکنوا است؟

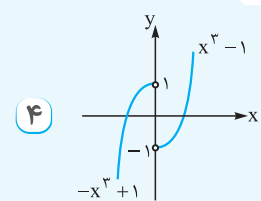
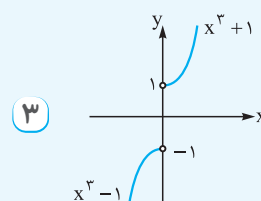
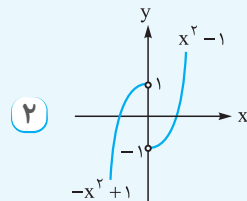
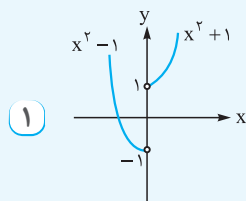
۴  $y = x^2 - \frac{x}{|x|}$

۳  $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$

۲  $y = x|x| - \frac{|x|}{x}$

۱  $y = x^2 + \frac{x}{|x|}$

**پاسخ ۱۳** اول هر تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم، بعد نمودار هر ۴ گزینه را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ غیریکنوا هستند ولی ۳، چون نمودار فقط رو به بالا حرکت کرده، تابعی اکیداً صعودی است.

بعضی وقت‌ها بازه‌های یکنوایی را می‌خواهند. مثلاً می‌پرسند تابع در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ نمودار را می‌کشیم و بازه را پیدا می‌کنیم.

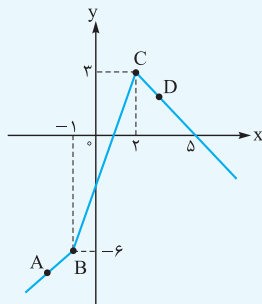
**آزمون ۱۶** بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع  $f(x) = |x+1| - |2x-4|$  در آن اکیداً نزولی است، کدام بازه می‌باشد؟

۴  $[2, +\infty)$

۳  $[-1, +\infty)$

۲  $(-\infty, 2]$

۱  $(-\infty, -1]$



	A	B	C	D
	قبلی	ریشه	ریشه	بعدي
x	-2	-1	2	3
y	-7	-6	3	2

**پاسخ ۱۴** ریشه قدرمطلق‌ها را پیدا می‌کنیم و با نقطه‌یابی، نمودار  $f$  را رسم می‌کنیم:

۴ نقطهٔ بالا را به ترتیب به هم وصل می‌کنیم تا نمودار  $f$  به دست آید.

بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار رو به پایین می‌رود (اکیداً نزولی می‌باشد)، بازه  $[2, +\infty)$  است.

یکی از توابع مورد علاقهٔ طراحان سؤال در این قسمت، توابع به فرم  $|x| \pm |x|$  هستند. برای بررسی یکنوایی آن‌ها، می‌توانیم آن‌ها را دوضابطه‌ای بنویسیم و بعد از نکتهٔ زیر استفاده کنیم.

تابع به فرم  $|x| \pm |x|$  را اگر دوضابطه‌ای بنویسیم، به دو معادلهٔ خط می‌رسیم. حالا با توجه به علامت شیب‌ها:

- ۱ اگر هر دو مثبت باشند، تابع اکیداً صعودی است.
- ۲ اگر هر دو منفی باشند، تابع اکیداً نزولی است.
- ۳ اگر یکی مثبت و یکی صفر باشد، تابع صعودی است.
- ۴ اگر یکی منفی و یکی صفر باشد، تابع نزولی است.
- ۵ اگر یکی مثبت و یکی منفی باشد، تابع غیریکنواست.

مثلاً تابع  $y = |2x - 4| + 3x$  را در نظر بگیرید. با توجه به ریشه قدرمطلق ( $x = 2$ )، آن را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$y = |2x - 4| + 3x = \begin{cases} (2x - 4) + 3x & x \geq 2 \\ (-2x + 4) + 3x & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 5x - 4 & x \geq 2 \\ x + 4 & x < 2 \end{cases}$$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد پس تابع اکیداً صعودی است.

**تست ۴** | اگر تابع  $f(x) = |2x + 1| + ax$  تابعی اکیداً نزولی باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a < -2$       (۲)  $a > -2$       (۳)  $-2 < a < 2$       (۴)  $a < 2$

**پاسخ ۱** | شیب ضابطه‌ها مهم است. شیب یکی  $2 + a$  و شیب دیگری  $-2 + a$  می‌شود.

$$\left. \begin{aligned} a + 2 < 0 &\Rightarrow a < -2 \\ a - 2 < 0 &\Rightarrow a < 2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} a < -2$$

باید هر دو منفی باشند:

### بررسی یکنوایی در نمایش زوج مرتبی

برای بررسی یکنوایی تابعی با نمایش زوج مرتبی، ابتدا زوج مرتب‌ها را از  $x$  کوچک به بزرگ مرتب می‌نویسیم. الان ۵ حالت ممکن است رخ دهد:

- ۱ با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها هم زیاد شوند. ← اکیداً صعودی
- ۲ با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند. ← صعودی
- ۳ با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها هم کم شوند. ← اکیداً نزولی
- ۴ با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها یا کم شوند یا ثابت بمانند. ← نزولی
- ۵ با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها هم کم شوند، هم زیاد. ← غیریکنوا

**تست ۴** | تابع  $f = \{(2, 5 - m), (-1, m + 11), (6, 2m - 1)\}$  تابعی اکیداً نزولی است. محدوده  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m > 2$       (۲)  $m < -3$       (۳)  $-3 < m < 2$       (۴)  $-3 \leq m \leq 2$

$$f = \{(2, 5 - m), (-1, m + 11), (6, 2m - 1)\}$$

$$m + 11 > 5 - m > 2m - 1$$

**پاسخ ۳** | زوج مرتب‌ها را از  $x$  کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

در تابع اکیداً نزولی با افزایش  $x$ ها،  $y$ ها کم می‌شوند، پس:  
نامعادله بالا تبدیل به دو نامعادله می‌شود:

$$m + 11 > 5 - m \Rightarrow 2m > -6 \Rightarrow m > -3 \quad (1)$$





$$5 - m > 2m - 1 \Rightarrow -3m > -6 \Rightarrow m < 2 \quad (2)$$

$$-3 < m < 2$$

بین دو شرط بالا، اشتراک می‌گیریم:

### معروف‌ترین توابع غیریکنوا

قبل از این در یک جدول توابع یکنوای معروف را دیدیم. الان می‌خواهیم معروف‌ترین توابع غیریکنوا را بررسی کنیم. در این توابع، بازه‌های یکنوایی مهم هستند؛ یعنی بدانیم کجا صعودی و کجا نزولی هستند. در جدول زیر این توابع را می‌بینیم:

تابع	ضابطه	نمودار	نقطه مرزی بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y = ax^2 + bx + c$		رأس
قدرمطلق خطی	$y = \pm  ax + b $		ریشه داخل قدرمطلق
گلدانی	$y =  x - a  +  x - b $		ریشه‌های داخل قدرمطلق
هموگرافیک	$y = \frac{ax + b}{cx + d}$		ریشه مخرج

مثلاً در سهمی  $y = x^2 - 6x + 1$  که دهانه‌اش رو به بالاست، طول رأس برابر است با:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$$

با توجه به نمودار، در بازه  $(-\infty, 3]$  تابع نزولی و در بازه  $[3, +\infty)$  صعودی است.

**تست ۴** | سهمی  $y = -x^2 + (m - 3)x + 1$  در بازه  $[-3, 2]$ ، صعودی است. محدوده  $m$  کدام است؟

- (۱)  $m \geq 7$       (۲)  $m \geq -1$       (۳)  $m < 7$       (۴)  $m > 1$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-m + 3}{-2} = \frac{m - 3}{2}$$

**پاسخ ۱** | طول رأس، نقطه مهم داستان است:



$$x_S = \frac{m-3}{2}$$

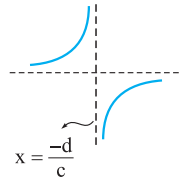
$$2 \leq \frac{m-3}{2} \Rightarrow m-3 \geq 4 \Rightarrow m \geq 7$$

چون  $a < 0$  است، پس سهمی این شکلی می‌شود:

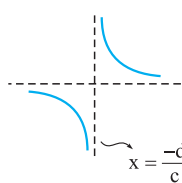
پس بازه  $[-3, 2]$  باید در شاخه صعودی باشد، یعنی باید  $x = 2$  (انتهای بازه)، قبل یا روی  $x_S$  باشد:

### نکته

نمودار هر تابع هموگرافیک با ضابطه  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  از دو شاخه تشکیل شده است. در مورد یکنوایی آن بدانید:



۱ اگر  $ad - bc > 0$  باشد، تابع در هر شاخه‌اش صعودی است و در کل غیریکنواست.



۲ اگر  $ad - bc < 0$  باشد، تابع در هر شاخه‌اش نزولی است و در کل غیریکنواست.

$$\left(\frac{-d}{c}, +\infty\right), \left(-\infty, \frac{-d}{c}\right)$$

۳ تابع در بازه‌هایی که قبل و بعد از ریشه‌ی مخرج هستند، یکنوایی است:

$$2(3) - (-1)(1) = 7$$

مثلاً در تابع  $y = \frac{2x-1}{x+3}$ ، اول  $ad - bc$  را تشکیل می‌دهیم:

چون مثبت شد، پس در هر شاخه‌اش صعودی است و در کل غیریکنواست. ریشه‌ی مخرج  $x = -3$  است، یعنی در بازه‌های  $(-\infty, -3)$  و  $(-3, +\infty)$  به طور جداگانه، صعودی است.

تست ۱۶ | تابع  $f(x) = \frac{-4x+8}{2x-k}$  در بازه  $(3, +\infty)$  اکیداً صعودی است. محدوده  $k$  کدام است؟

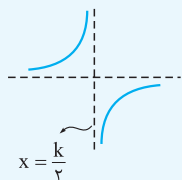
(۴)  $[2, 4)$

(۳)  $[6, 8)$

(۲)  $[5, 7)$

(۱)  $(4, 6]$

$$2x - k = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2}$$



پاسخ ۱۶ | ریشه‌ی مخرج را حساب می‌کنیم:

قرار است تابع هموگرافیکمان، در هر شاخه اکیداً صعودی باشد، این شکلی:

پس الان دوتا شرط لازم است:

$$(-4)(-k) - 8(2) > 0 \Rightarrow 4k - 16 > 0 \Rightarrow k > 4$$

(۱)  $ad - bc$  مثبت باشد:

$$3 \geq \frac{k}{2} \Rightarrow k \leq 6$$

(۲) بازه  $(3, +\infty)$  بعد از  $x = \frac{k}{2}$  باشد، یعنی ۳ باید بزرگ‌تر یا مساوی  $\frac{k}{2}$  باشد:

$$(k > 4) \cap (k \leq 6) = 4 < k \leq 6$$

اشتراک شرط (۱) و (۲) را می‌گیریم:

## کاربرد یکنوایی در حل نامعادلات

$$a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$$

تابع اکیداً صعودی

$$a > b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$$

تابع اکیداً نزولی

یک بار دیگر تعریف ریاضی توابع اکیداً یکتوا را ببینید:

### نکته

دو جمله بالا را به زبان دیگری می‌گوییم. از این دو جمله در حل نامعادلات و برخی سؤال‌های دامنه استفاده می‌کنیم.

$a > b$

۱ اگر  $f$  اکیداً صعودی و  $f(a) > f(b)$ ، با حذف  $f$ ها، جهت عوض نمی‌شود:

$a < b$

۲ ولی اگر  $f$  اکیداً نزولی و  $f(a) > f(b)$ ، با حذف  $f$ ها، جهت عوض می‌شود:

مثلاً اگر  $f$  اکیداً صعودی و  $f(3x) > f(x+2)$ ، آن‌گاه  $3x > x+2$  و در نتیجه  $x > 1$  است.

تست ۱۷ | اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی با دامنه  $\mathbb{R}$  باشد، در چه بازه‌ای نمودار تابع  $f(x^2+1)$  بالای نمودار تابع  $f(2x+9)$  قرار دارد؟

(۴)  $(-4, 2)$

(۳)  $(-2, 4)$

(۲)  $\mathbb{R} - [-4, 2]$

(۱)  $\mathbb{R} - [-2, 4]$

$$f(x^2+1) > f(2x+9)$$

پاسخ ۱۷ | قرار است تابع  $f(x^2+1)$  بالای تابع  $f(2x+9)$  باشد:

$$x^2+1 < 2x+9$$

چون  $f$  اکیداً نزولی است، پس با حذف  $f$ ها، جهت تغییر می‌کند:

$$x^2 - 2x - 8 < 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} -2 < x < 4$$

نامعادله را حل می‌کنیم:



ممکن است این موضوع را با دامنه یک تابع رادیکالی ادغام کنند. یک تست ببینید.

**تست ۱۴** توابع  $f(x) = -(x-1)^3 + 12$  و  $g(x) = \sqrt{f(|x|) - f(|2x-1|)}$  مفروض‌اند. اگر دامنه تابع  $g$  به صورت  $\mathbb{R} - (a, b)$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

- ۱)  $-\frac{2}{3}$       ۲)  $\frac{2}{3}$       ۳)  $\frac{4}{3}$       ۴)  $\frac{1}{3}$

**پاسخ ۱۳** برای دامنه تابع رادیکالی  $g$ ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:  $f(|x|) - f(|2x-1|) \geq 0 \Rightarrow f(|x|) \geq f(|2x-1|)$  حالا باید بگوییم چون  $f$  نزولی است (چون ضریب  $x^3$  منفی می‌شود)، پس با حذف  $f$ ها، جهت عوض می‌شود:

$$f(|x|) \geq f(|2x-1|) \xrightarrow{f \text{ نزولی}} |x| \leq |2x-1|$$

برای حل نامعادله‌های به فرم  $|A| \geq |B|$ ، بهترین راه توان ۲ رساندن است (هیچ محدودیتی ایجاد نمی‌کند):

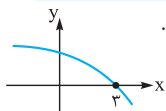
$$|x| \leq |2x-1| \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 \leq 4x^2 - 4x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 4x + 1 \geq 0 \xrightarrow{\text{تابین ریشه‌ها}} x \geq 1 \text{ یا } x \leq \frac{1}{3}$$

$$D_g = \mathbb{R} - \left(\frac{1}{3}, 1\right)$$

پس:

$$a + b = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

در نتیجه:



اگر هم لازم شد یک نمودار فرضی برای تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی)  $f$  بکشید و بعد حل نامعادله یا محاسبه دامنه را انجام دهید. مثلاً اگر گفته شده بود،  $f$  اکیداً نزولی و  $f(3) = 0$ ، شکل روبه‌رو را می‌کشیم:

**تست ۱۵** اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی با دامنه  $\mathbb{R}$  و  $f(-2) = 0$  باشد، جواب نامعادله  $\frac{x^3 - 9x}{f(x)} \geq 0$  شامل چند عدد صحیح است؟

- ۱) ۳      ۲) ۴      ۳) ۵      ۴) ۶

**پاسخ ۱۳** برای  $f$  یک شکل فرضی که نزولی باشد و محور  $x$ ها را در  $-2$  قطع کند، می‌کشیم و نامعادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{x^3 - 9x}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x^2 - 9)}{f(x)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x(x-3)(x+3)}{f(x)} \geq 0$$

	-3	-2	0	3	
$x^3 - 9x$	-	+	+	-	+
$f(x)$	+	+	-	-	-
کل	-	+	-	+	-

با توجه به ریشه‌ها و نمودار  $f$ ، کل کسر را تعیین علامت می‌کنیم:

**اشاره ۱۳** برای تعیین علامت  $f(x)$ ، قسمت‌هایی که نمودار بالای محور  $x$ هاست،

مثبت و قسمت‌هایی که زیر محور  $x$ هاست، منفی شده است.

$$[-3, -2] \cup [0, 3]$$

قسمت‌های مثبت و صفر جدول، جواب است:

$$\{-3, 0, 1, 2, 3\}$$

بازه بالا شامل ۵ عدد صحیح است:

## یکنوایی و اعمال جبری

فرض کنید وضعیت یکنوایی توابع  $f$  و  $g$  را می‌دانیم و دنبال وضعیت یکنوایی توابع  $f - g$  یا  $f + g$  یا  $f \times g$  یا  $f \div g$  ... هستیم. تعداد حالت‌های بررسی زیاد می‌شود. مهم‌ترین حالت‌ها را در جدول روبه‌رو می‌بینید:

**اشاره ۱۳** خانه‌های خالی جدول مقابل، یعنی وضعیت تابع نامشخص است (و هر چیزی می‌تونه بشه!)

صعودی، نزولی، غیر یکنوا

حالا نکات زیر را بخوانید:

۱)  $f$  و  $-f$  در یکنوایی کاملاً برعکس هم هستند. یعنی اگر  $f$  اکیداً صعودی باشد،  $-f$  اکیداً نزولی است.

۲)  $f$  و  $\frac{1}{f}$  به شرطی که  $f$  تغییر علامت ندهد، در یکنوایی برعکس هم هستند ولی اگر  $f$  تغییر علامت بدهد،  $\frac{1}{f}$  غیر یکنوا می‌شود.

۳) اگر دو تابع  $f$  و  $g$  هر دو اکیداً صعودی (یا نزولی) باشند، جمعشان یعنی  $f + g$  هم اکیداً صعودی (یا نزولی) می‌ماند ولی تفریقشان نامعلوم است.

۴) برای تفریق دو تابع، می‌توانیم از نکته (۳) استفاده کنیم، مثلاً اگر  $f$  صعودی و  $g$  نزولی باشد، آن‌گاه چون  $-g$  صعودی است، می‌توانیم  $f - g$  را به شکل  $f + (-g)$  ببینیم که مجموع دو تابع صعودی است و در نتیجه صعودی می‌شود.

۵) یکی از خطرناک‌ترین اشتباهات در قسمت ضرب دو تابع صعودی رخ می‌دهد که بچه‌ها فکر می‌کنند ضرب دو تابع صعودی، تابعی صعودی است ولی این‌طور نیست! مثلاً  $x$  و  $2x$  هر دو صعودی‌اند ولی ضربشان  $2x^2$  یک سهمی است که غیر یکنواست.

f	g	f + g	f - g	fg
ص	ص	ص		
ص	ن		ص	
ن	ص		ن	
ن	ن	ن		

جمله درست این قسمت این است: «ضرب دو تابع صعودی با مقادیر مثبت، تابعی صعودی است.»  
 مثلاً  $y = 2^x$  و  $y = \sqrt{x}$  هر دو توابعی صعودی و مقادیرشان مثبت است، پس تابع  $y = 2^x \sqrt{x}$  تابعی صعودی است.

**آزمون ۱** | تابع  $y = x^3 + 2x - 6$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

$$y = (x^3) + (2x - 6)$$

**پاسخ ۱** | تابع داده شده را به صورت جمع دو تابع  $x^3$  و  $2x - 6$  ببینیم:

$x^3$  که اکیداً صعودی است.  $2x - 6$  هم خطی با شیب مثبت است، پس اکیداً صعودی می باشد.

جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

پس  $y = x^3 + 2x - 6$  اکیداً صعودی است.

$$y = \underbrace{x^3}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{2x - 6}_{\text{صعودی اکید}}$$

دامنه توابع  $f$  و  $g$  از اشتراک دامنه  $f$  و  $g$  به دست می آید. ممکن است از توابع  $f$  و  $g$ ، یکی غیریکنوا باشد ولی محدود شدن دامنه باعث یکنوا شدنش شود و بعد بتوانیم از نکات گفته شده استفاده کنیم. یک تست ببینید:

**آزمون ۲** | تابع  $y = \log(2-x) + x^2 - 4x$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

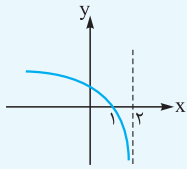
(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی

(۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

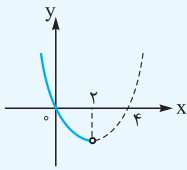
$$y = \underbrace{\log(2-x)}_{f(x)} + \underbrace{x^2 - 4x}_{g(x)}$$

**پاسخ ۲** | تابع داده شده را به صورت جمع دو تابع می نویسیم:

نمودار تابع  $f(x) = \log(2-x)$  به صورت زیر است:



پس  $f$  نزولی است. از طرفی دامنه  $f$ ، به صورت  $x < 2$  می باشد. این دامنه روی سهمی  $g(x) = x^2 - 4x$  هم اثر می گذارد.



سهمی  $g(x) = x(x-4)$  را با دامنه  $x < 2$  رسم می کنیم:

$$y = \underbrace{\log(2-x)}_{\text{نزولی اکید}} + \underbrace{x^2 - 4x}_{\text{نزولی اکید}}$$

گ هم در این بازه، اکیداً نزولی است. مجموع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است:

**نکته** برای تعیین وضعیت ترکیب دو تابع یکنوا، از قانون «علامت ضرب دو عدد» می توانیم استفاده کنیم.

تابع صعودی را با علامت + و تابع نزولی را با علامت - نشان می دهیم. مثلاً اگر  $f$  صعودی و  $g$  نزولی باشد،  $fog$  هم نزولی است، چون مثبت ضربدر منفی می شود منفی.

$$fog \Rightarrow (+) \times (-) = (-)$$

کل حالات هم در جدول می بینید:

f	g	fog
ص	ص	ص
+	+	+
ص	ن	ن
+	-	-
ن	ص	ن
-	+	-
ن	ن	ص
-	-	+

**آزمون ۳** | اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی و  $gof$  تابعی اکیداً صعودی باشد،  $g$  کدام می تواند باشد؟

(۱)  $g(x) = 2^x$  (۲)  $g(x) = x^2 - 1$  (۳)  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  (۴)  $g(x) = \sqrt[3]{x}$

**پاسخ ۳** | چون منفی در منفی، می شود مثبت، پس  $g$  باید نزولی باشد. در بین گزینه ها فقط  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  اکیداً نزولی است.

دقت کنید  $y = \sqrt{x}$  تابعی اکیداً صعودی است که تغییر علامت نمی دهد (چون  $\sqrt{x} \geq 0$ ) پس  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  اکیداً نزولی می شود.

**آزمون ۴** | اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و  $g$  اکیداً نزولی باشد، کدام تابع زیر قطعاً اکیداً نزولی است؟

(۱)  $(fogog)(x)$  (۲)  $(gof)(-x)$  (۳)  $(fof)(-x^2)$  (۴)  $(gog)(-x^2)$





۱)  $(f \circ g \circ g)(x) \Rightarrow (+) \times (-) \times (-) \times (+) = (+) \Rightarrow$  اکیداً صعودی

پاسخ ۴ | همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۲)  $(g \circ f)(-x) \Rightarrow (-) \times (+) \times (-) = (+) \Rightarrow$  اکیداً صعودی

۳)  $(f \circ f)(-x^2) \Rightarrow (+) \times (+) \times ? = ? \Rightarrow$  نامشخص  
غیریکنوا

۴)  $(g \circ g)(-x^2) \Rightarrow (-) \times (-) \times (-) = (-) \Rightarrow$  اکیداً نزولی

• **برد با یکنوایی** اگر  $f$  تابعی اکیداً یکنوا و پیوسته با دامنه  $[a, b]$  (یا  $(a, b)$ ) یا  $[a, b]$  یا  $(a, b)$  باشد، با جای‌گذاری نقاط اول و آخر دامنه

۱)  $f$  اکیداً صعودی و پیوسته  $D_f = [a, b] \rightarrow R_f = [f(a), f(b)]$  در ضابطه تابع، به نقطه اول و آخر برد می‌رسیم:

۲)  $f$  اکیداً نزولی و پیوسته  $D_f = [a, b] \rightarrow R_f = [f(b), f(a)]$

آزمون ۴ | اگر  $f(x) = 2^{\sqrt{x-4} - \sqrt{20-4x}}$  و برد  $f$  بازه  $[a, b]$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

۱)  $\frac{7}{4}$       ۲) ۲      ۳)  $\frac{9}{4}$       ۴)  $\frac{5}{2}$

پاسخ ۳ | عبارتی که در توان آمده است را بررسی می‌کنیم:

$\sqrt{x-4}$  اکیداً صعودی  
 $-\sqrt{20-4x}$  اکیداً صعودی  
اکیداً صعودی

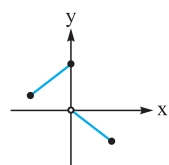
$\sqrt{x-4} \xrightarrow{\text{دامنه}} x \geq 4$   
 $\sqrt{20-4x} \xrightarrow{\text{دامنه}} x \leq 5$

اگر  $A$  اکیداً صعودی باشد،  $2^A$  هم اکیداً صعودی است. در نتیجه تابع  $f$ ، اکیداً صعودی است.  
تابع  $f$ ، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

چون  $f$  اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در  $x = 4$  و  $x = 5$  حساب کنیم:

$f(4) = 2^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$   
 $f(5) = 2^{1-0} = 2^1 = 2$   
 $\Rightarrow R_f = [\frac{1}{4}, 2] \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$

• **رابطه یکنوایی و یک‌به‌یک بودن** رابطه بین یکنوایی و یک‌به‌یک بودن را به صورت کامل‌تر در چند جمله آورده‌ایم:



صعودی اکید  
 $y = x^3 + x - 3$   
صعودی اکید صعودی اکید

۱) هر تابع اکیداً یکنوا حتماً یک‌به‌یک است.

۲) هر تابع غیر یک‌به‌یک حتماً اکیداً یکنوا نیست. (عکس نقیض جمله ۱)

۳) هر تابع یک‌به‌یکی لزوماً یکنوا نیست، مثل شکل روبه‌رو:

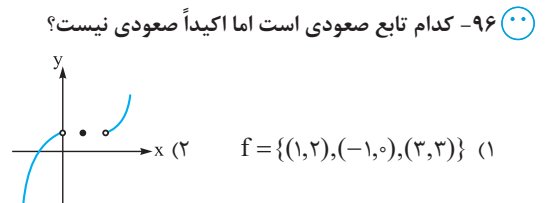
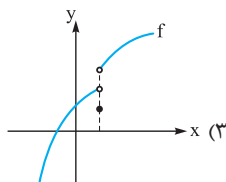
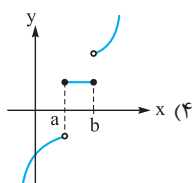
۴) هر تابع یک‌به‌یک و پیوسته‌ای، حتماً اکیداً یکنوا است. (یعنی جمله ۳، شرط پیوستگی را کم داشت.)

مثلاً تابع  $y = x^3 + x - 3$  تابعی یک‌به‌یک است، زیرا:

توابع  $x^3$  و  $x - 3$  صعودی اکیدند و مجموعشان نیز صعودی اکید است:

گفتیم هر تابع یکنوا اکیدی، یک‌به‌یک است، پس تابع بالا یک‌به‌یک است.

## درس سوم: توابع یکنوا



### بررسی یکنوایی توابع

☞ اگر با توابعی که همیشه یکنوا هستند آشنا نیستید حتماً درس‌نامه را نگاه کنید.

☞ ۹۷- اگر تابع  $f(x) = (1-a^2)x + a + 3$ ، تابعی اکیداً صعودی باشد، عرض نقطه برخورد  $f$  با محور  $y$ ها در چه بازه‌ای است؟  
 (۱)  $(1, 3)$  (۲)  $(2, 4)$  (۳)  $(3, 5)$  (۴)  $(4, 6)$

☞ ۹۸- کدام تابع زیر، اکیداً صعودی است؟

(۱)  $y = \sqrt{-2x+4}$  (۲)  $y = -(2-x)^3 - 1$  (۳)  $y = \log_{1/3} x$  (۴)  $y = (\cos \frac{\pi}{6})^x$

☞ ۹۹- به ازای  $k \in (a, b)$ ، تابع نمایی  $y = (\frac{k+1}{3-k})^x$  تابعی صعودی است. بیشترین مقدار  $b-a$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

☞ ۱۰۰- به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، تابع  $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$  با دامنه  $\mathbb{R}$ ، نزولی است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) هیچ مقدار  $m$

☞ ۱۰۱- اگر تابع  $f(x) = |x+2m-1| - |x-m+5|$  تابعی نزولی باشد، محدوده کامل  $m$  کدام است؟

(۱)  $m \geq 2$  (۲)  $m \leq 2$  (۳)  $m > 2$  (۴)  $m < 2$

☞ برای تعیین یکنوایی توابعی که چندضابطه‌ای، قدرمطلق یا برابری هستند، همیشه تابع را رسم می‌کنیم.

☞ ۱۰۲- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 & x > 0 \end{cases}$  چگونه است؟

(۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی و سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی و سپس صعودی

☞ ۱۰۳- تابع  $f(x) = \log_7 \sqrt[3]{x}$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

☞ ۱۰۴- تابع  $f(x) = \log_{1/5} x^2$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) نه صعودی، نه نزولی (۴) هم صعودی، هم نزولی

☞ ۱۰۵- تابع  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}$  چگونه تابعی است؟

(۱) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۲) ابتدا نزولی، سپس صعودی (۳) همواره صعودی (۴) همواره نزولی

☞ ۱۰۶- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً صعودی نیست؟

(۱)  $f(x) = \frac{|x|}{x} + x$  (۲)  $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$  (۳)  $f(x) = 2x - |x-1|$  (۴)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$

☞ ۱۰۷- کدام یک از توابع زیر در دامنه خود اکیداً نزولی است؟

(۱)  $f(x) = x^2 |x|$  (۲)  $f(x) = -x^2 |x|$  (۳)  $f(x) = x |x|$  (۴)  $f(x) = -x |x|$

☞ ۱۰۸- یکنوایی تابع  $f: (-1, 1) - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  چگونه است؟  
 $f(x) = x |x| + \frac{x}{|x|}$

(۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

☞ ۱۰۹- تابع  $f(x) = |x^2 - 2x|$  و  $x \geq 0$  در بازه  $(a, b)$  نزولی اکید است. حداکثر مقدار  $b-a$  کدام است؟

(۱)  $\frac{3}{2}$  (۲)  $\frac{1}{2}$  (۳) ۱ (۴) ۲

☞ ۱۱۰- بازه  $[a, b]$ ، بزرگ‌ترین بازه‌ای است که تابع  $f(x) = x |x-2|$  در آن اکیداً نزولی است. کدام خط، نمودار  $f$  را در ۳ نقطه قطع می‌کند؟

(۱)  $y = b$  (۲)  $y = a$  (۳)  $y = \frac{a}{b}$  (۴)  $y = \frac{b}{a}$

☞ ۱۱۱- اگر  $f(x) = x^3 + x^2$  و  $g(x) = |x|$  باشد، تابع  $\frac{f}{g}$  در چه بازه‌ای نزولی است؟

(۱)  $(-1, -\frac{1}{2})$  (۲)  $(-\frac{1}{2}, 0)$  (۳)  $(0, \frac{1}{2})$  (۴)  $(\frac{1}{2}, 1)$

(تجربی خارج ۹۸)

☞ ۱۱۲- تابع با ضابطه  $f(x) = |x+1| - |x-2|$ ، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

(۱)  $(-\infty, 2)$  (۲)  $(-1, +\infty)$  (۳)  $(-1, 2)$  (۴)  $(2, +\infty)$

(تجربی ۹۸)

☞ ۱۱۳- تابع با ضابطه  $f(x) = |x+2| + |x-1|$  در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

(۱)  $(-\infty, -2)$  (۲)  $(-\infty, 1)$  (۳)  $(-2, 1)$  (۴)  $(1, +\infty)$

☞ ۱۱۴- تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 0 \\ 3x + a & x < 0 \end{cases}$  بر دامنه‌اش اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار  $a$  کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) -۲

۱۱۵- به ازای چه حدودی از  $k$ ، تابع  $f(x) = \begin{cases} 4 - |x-1| & x \leq 0 \\ k + x^2 & x > 0 \end{cases}$  تابعی اکیداً یکنواست؟

- (۱)  $k > 3$  (۲)  $k \leq 3$  (۳)  $k \geq 3$  (۴)  $k < 3$

۱۱۶- اگر  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$  تابعی نزولی باشد، ضابطه  $g$  کدام می‌تواند باشد؟

- (۱)  $y = |x|$  (۲)  $y = -x^2$  (۳)  $y = -|x| - x$  (۴)  $y = x + |x|$

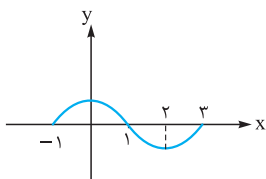
۱۱۷- کدام تابع اکیداً یکنواست؟

- (۱)  $y = |2x| + x$  (۲)  $y = |2x - 4| - x$  (۳)  $y = |x + 1| + 2x$  (۴)  $y = |x - 1| + x$

۱۱۸- اگر تابع  $f(x) = ax + 4 - |\frac{x}{4} + 1|$ ، تابعی غیریکنوا باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a > \frac{-1}{4}$  (۲)  $a < \frac{1}{4}$  (۳)  $\frac{-1}{4} < a < \frac{1}{4}$  (۴)  $\frac{-1}{4} \leq a \leq \frac{1}{4}$

۱۱۹- شکل مقابل نمودار تابع  $y = f(x)$  است. نمودار تابع  $y = f(1-x)$  در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



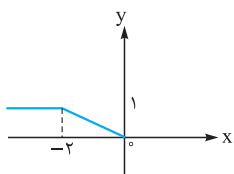
- (۱)  $(-3, -1)$

- (۲)  $[-4, -3]$

- (۳)  $(-1, 1)$

- (۴)  $[1, 2]$

۱۲۰- نمودار تابع  $f$  در شکل مقابل رسم شده است. اگر  $g(x) = 2 - |x|$ ، آن‌گاه تابع  $f \circ g$  در کدام یک از بازه‌های زیر صعودی است؟



- (۱)  $(-4, 0)$

- (۲)  $(-2, 2)$

- (۳)  $(1, 5)$

- (۴)  $(-1, 3)$

۱۲۱- اگر  $f(x) = \frac{|x| + x^2}{1 + |x|}$ ،  $g(x) = 2x^2 + x - 1$  و تابع  $f \circ g$  در بازه  $[-a^2, -b^2]$  صعودی باشد، بیشترین مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱)  $1/5$

- (۲)  $1/25$

- (۳)  $1$

- (۴)  $0/75$

۱۲۲- اگر  $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ ،  $g(x) = x^2 - x$  و تابع  $(f \circ g)(x+1)$  در بازه  $(a, +\infty)$  صعودی باشد، کم‌ترین مقدار  $a$  کدام است؟

- (۱) صفر

- (۲)  $-1$

- (۳)  $1$

- (۴)  $2$

۱۲۳- تابع  $f(x) = |a + x^3|$  در بازه  $(-\infty, a - 2)$  نزولی است. چند عدد طبیعی در مجموعه مقادیر  $a$  وجود دارد؟

- (۱) صفر

- (۲)  $1$

- (۳)  $2$

- (۴) بی‌شمار

در نمایش زوج مرتبی، ابتدا باید زوج مرتب‌ها را از  $x$  کوچک به بزرگ بنویسیم.

۱۲۴- اگر تابع  $f = \{(1, 1), (3, 6), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (10, 20)\}$  اکیداً صعودی باشد، حدود  $m$  شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) صفر

- (۲)  $2$

- (۳)  $4$

- (۴)  $6$

۱۲۵- اگر  $f = \{(1, 3a + 1), (-1, a + 1), (2, 4a + 3)\}$  تابعی صعودی باشد، مقادیر  $a$  در کدام بازه است؟

- (۱)  $(-\infty, 0]$

- (۲)  $(-\infty, 0)$

- (۳)  $(0, +\infty)$

- (۴)  $[0, +\infty)$

۱۲۶- توابع  $f = \{(2, 3m), (-3, m), (5, -m), (1, m^2 - 1)\}$  و  $g = \{(-3, 12), (1, 1), (4, -m), (5, 2)\}$  مفروض‌اند. اگر  $f + g$  تابعی نزولی باشد، چند

مقدار صحیح برای  $m$  وجود دارد؟

- (۱)  $4$

- (۲)  $5$

- (۳)  $6$

- (۴)  $7$

### بازه‌های یکنوایی توابع غیریکنوا

در سهمی‌ها، یک سمت رأس صعودی و سمت دیگر رأس نزولی است.

۱۲۷- تابع  $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$  روی بازه  $[-1, 2]$  چگونه است؟

- (۱) ابتدا صعودی سپس نزولی

- (۲) ابتدا نزولی سپس صعودی

- (۳) نزولی

- (۴) صعودی

۱۲۸- مقادیر تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  با دامنه  $\{x : |x - 1| < 2\}$  همواره چگونه است؟

- (۱) نزولی

- (۲) مثبت

- (۳) صعودی

- (۴) منفی

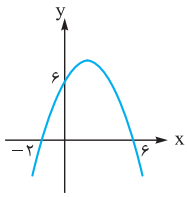
۱۲۹- تابع  $f(x) = x^2 - (2m + 1)x + 1$  در بازه  $[-1, 2]$  غیریکنوا است. بازه  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$

- (۲)  $-1 < m < \frac{1}{4}$

- (۳)  $\frac{1}{4} \leq m \leq \frac{3}{4}$

- (۴)  $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$



۱۳۰- اگر تابع  $f(x) = \left(\frac{1}{m}\right)x^2 - x + 3$  در بازه  $[1, +\infty)$  اکیداً صعودی باشد، محدوده  $m$  کدام است؟

- (۱)  $-2 \leq m < 0$  (۲)  $0 < m \leq 2$  (۳)  $m \leq -2$  (۴)  $m \geq 2$

۱۳۱- با توجه به نمودار سهمی  $y = f(x)$ ، اگر تابع  $g(x) = kx^2 + 4f(x)$  تابعی اکیداً یکنوا باشد، مقدار  $k$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)  $\frac{1}{2}$

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴)  $\frac{1}{2}$

تابع همگرا/افیک. هیچ‌گاه یکتوا نیست. مگر این‌که دامنه تابع محدود شده باشد.

۱۳۲- تابع  $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$  در بازه  $(-\infty, a)$  اکیداً نزولی است. حداکثر  $a$  کدام است؟

- (۱)  $-\frac{1}{3}$  (۲) صفر (۳) ۲ (۴) ۳

۱۳۳- تابع  $f(x) = \frac{-1}{x-2}$  در بازه  $(-\infty, a]$  اکیداً صعودی است. حداکثر مقدار صحیح  $a$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۳۴- کدام یک از توابع زیر در بازه  $(-2, +\infty)$  اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $y = \frac{x-1}{x+3}$  (۲)  $y = \frac{2x-3}{x+1}$  (۳)  $y = \frac{-x+1}{x+3}$  (۴)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$

۱۳۵- اگر در بازه  $(1, +\infty)$  تابع  $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$  اکیداً یکنوا باشد، حدود  $a$  کدام است؟

- (۱)  $(-\infty, 2)$  (۲)  $(-\infty, 2]$  (۳)  $(-\infty, 2) - \{-2\}$  (۴)  $(-\infty, 2] - \{-2\}$

۱۳۶- تابع  $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$  در بازه‌های  $(-\infty, -2)$  و  $(-2, +\infty)$  یکنوا اکید است و محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند. کدام تابع زیر اکیداً صعودی است؟

- (۱)  $y = d^{-x}$  (۲)  $y = bx^2$  (۳)  $y = dx + b|x|$  (۴)  $y = bx + d$

### کاربرد یکتوایی در حل نامعادلات

۱۳۷- اگر  $f$  تابعی نزولی با دامنه  $\mathbb{R}$  و  $f(2a-1) > f(5-a)$  باشد، محدوده  $a$  کدام است؟

- (۱)  $a \geq 2$  (۲)  $a \leq 2$  (۳)  $a > 2$  (۴)  $a < 2$

۱۳۸- اگر  $g(x) = \sqrt{f(2x+1)} - f(x-2)$  و  $f$  اکیداً نزولی باشد، دامنه تابع  $g(x)$  کدام است؟ ( $D_f = \mathbb{R}$ )

- (۱)  $[-3, +\infty)$  (۲)  $(-3, +\infty)$  (۳)  $(-\infty, -3)$  (۴)  $(-\infty, -3]$

۱۳۹- اگر  $f(x) = \frac{1-x}{x}$ ، آن‌گاه در کدام یک از بازه‌های زیر، نمودار تابع  $y = f(1+x^2)$  بالای نمودار تابع  $y = f(3+x^2)$  قرار دارد؟

- (۱)  $(-1, 1)$  (۲)  $(0, 2)$  (۳)  $(1, 3)$  (۴)  $(2, 4)$

۱۴۰- اگر  $f(x) = -x^2 + 2$  باشد، جواب نامعادله  $(f \circ f)(x) > f(x^2)$  کدام است؟

- (۱)  $(1, +\infty)$  (۲)  $(-\infty, 1)$  (۳)  $(-1, 1)$  (۴)  $\mathbb{R} - [-1, 1]$

۱۴۱- اگر  $f$  یک تابع اکیداً نزولی بوده و  $f(3) = 0$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf(x)}$  کدام است؟ ( $D_f = \mathbb{R}$ )

- (۱)  $[0, 3]$  (۲)  $\mathbb{R} - (0, 3)$  (۳)  $(-\infty, 3]$  (۴)  $[3, +\infty)$

۱۴۲- اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و  $f(2) = 0$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{(x^2-x)f(x)}$  شامل چند عدد طبیعی نیست؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

(خارج ۹۳)

۱۴۳- اگر  $f(x) = 2^x$  باشد، دامنه تابع  $y = \sqrt{f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x)}$  به کدام صورت است؟

- (۱)  $\mathbb{R} - (-1, 1)$  (۲)  $[-1, 0) \cup (0, 1]$  (۳)  $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$  (۴)  $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

(سراسری ۹۳ با تغییر)

۱۴۴- اگر  $f(x) = 4 - \left(\frac{1}{3}\right)^x$  باشد، دامنه تابع  $g(x) = \sqrt{xf(x)}$  کدام بازه است؟

- (۱)  $[-2, 0]$  (۲)  $\mathbb{R} - (-2, 0)$  (۳)  $[0, 2]$  (۴)  $\mathbb{R} - (0, 2)$

### یکنوایی و اعمال جبری

۱۴۵- چندتا از عبارات زیر درست است؟

- (الف) اگر  $f$  صعودی و  $g$  نزولی باشد،  $f+g$  یک تابع ثابت است.  
 (ب) اگر  $f$  صعودی اکید و  $g$  نزولی باشد،  $f-g$  صعودی اکید است.  
 (ت) اگر  $f$  تابعی صعودی اکید و  $g$  تابعی ثابت باشد،  $f \times g$  اکیداً صعودی است.

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۱۴۶- اگر  $f(x)$  تابعی اکیداً نزولی باشد، تابع  $y = f(-x^3)$  چگونه تابعی است؟

- (۱) اکیداً نزولی (۲) اکیداً صعودی (۳) غیریکنوا (۴) نامشخص می باشد.

۱۴۷- اگر  $f$  تابعی اکیداً صعودی و  $g$  اکیداً نزولی باشد، کدام یک از توابع زیر نزولی است؟

- (۱)  $y = f(x) + \sqrt{x}$  (۲)  $y = g \circ g(x)$  (۳)  $y = g(x^2)$  (۴)  $y = (f \circ g \circ f)(x)$

۱۴۸- تابع  $y = \frac{1}{\sqrt{2-x}+1}$  چگونه است؟

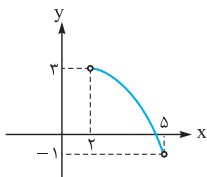
- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۴۹- اگر  $f$  تابعی اکیداً نزولی و زیر محور  $x$ ها باشد، توابع  $g(x) = -xf(x)$  و  $h(x) = \frac{1}{f(-x)}$  به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) صعودی - صعودی (۲) صعودی - نزولی (۳) نزولی - صعودی (۴) نزولی - نزولی

۱۵۰- در شکل مقابل، نمودار تابع  $f$  به طور کامل رسم شده است. برد تابع  $y = [\sqrt{x} - f(x)]$  چند عضو دارد؟

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳



۱۵۱- توابع  $f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x}$  و  $g(x) = |x| + \sqrt{-x}$  به ترتیب چگونه اند؟

- (۱) غیریکنوا - غیریکنوا (۲) غیریکنوا - نزولی (۳) صعودی - غیریکنوا (۴) صعودی - نزولی

۱۵۲- تابع  $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{1-x}$  از نظر یکنوایی چگونه است؟

- (۱) اکیداً صعودی (۲) اکیداً نزولی (۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی (۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۱۵۳- کدام عبارت، برای تابع  $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt{x^2-1}}$  درست است؟

- (۱) تابع  $f$  در بازه  $(0, 1) \cup (1, \infty)$  صعودی است.  
 (۲) تابع  $f$  در بازه‌های  $(0, 1)$  و  $(1, \infty)$  صعودی است.  
 (۳) تابع  $f$  در بازه  $(1, \infty)$  صعودی و در بازه  $(0, 1)$  نزولی است.  
 (۴) تابع  $f$  در بازه  $(1, \infty)$  نزولی و در بازه  $(0, 1)$  صعودی است.

(سراسری ۱۴۰۰)

### برد با یکنوایی

۱۵۴- برد تابع  $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x-1}$  شامل چند عدد طبیعی نمی شود؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

۱۵۵- اگر برد تابع  $f(x) = 2\sqrt{2+x} - \sqrt{7-x}$  بازه  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۲

۱۵۶- اگر برد تابع  $f(x) = -x^3 + \sqrt{-x} + 1$  با دامنه  $[-4, -1]$  به صورت  $(a, b]$  باشد،  $b-a$  کدام است؟

- (۱) ۶۲ (۲) ۶۴ (۳) ۶۶ (۴) ۶۸

(سراسری ۱۴۰۰)

۱۵۷- فرض کنید برد تابع  $f(x) = 2\sqrt{9\cos^2(x)-1} - 2\sqrt{1-9\cos^2(x)}$  به صورت  $[a, b]$  باشد، مقدار  $b-a$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{9}{4}$  (۲)  $\frac{15}{4}$  (۳)  $\frac{9}{2}$  (۴)  $\frac{21}{4}$

هر تابع اکیداً یکنوا، حتماً یک به یک است.

۱۵۸- کدام یک از تابع‌های زیر یک به یک است؟

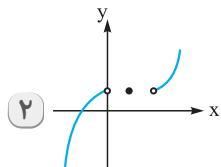
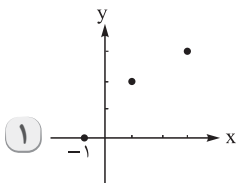
- (۱)  $f(x) = x + \sqrt{x}$  (۲)  $g(x) = x - \sqrt{x}$  (۳)  $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$  (۴)  $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$

(سراسری ۹۷)





۹۶. گزینه ۴ | نمودارها را کنار هم ببینید:



۱۰۱. گزینه ۲ تابع  $y = |x - a| - |x - b|$  به شرطی که ریشه قدرمطلق اولش بزرگتر از ریشه قدرمطلق دوم باشد نزولی است (یعنی  $a > b$ ):



در هر دو شرط بالا، اگر مساوی قرار دهیم، نمودارمان به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود که هم صعودی است و هم نزولی. ریشه قدرمطلقها را حساب می‌کنیم:

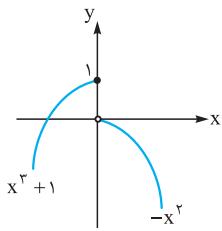
$$f(x) = |x + 2m - 1| - |x - m + 5|$$

ریشه:  $-2m+1$       ریشه:  $m-5$

شرط نزولی بودن را اعمال می‌کنیم:

$$-2m + 1 \geq m - 5 \Rightarrow -3m \geq -6 \Rightarrow m \leq 2$$

۱۰۲. گزینه ۳ اول نمودار تابع را رسم می‌کنیم:

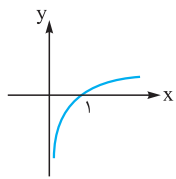


با توجه به نمودار، تابع ابتدا صعودی (در  $x \leq 0$ ) رو به بالا) و سپس نزولی (در  $x > 0$ ) رو به پایین) است.

۱۰۳. گزینه ۱ ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \log_2 \sqrt[3]{x} = \log_2 x^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_2 x$$

نمودار تابع  $y = \log_2 x$  به صورت روبه‌رو است: تابع صعودی اکید است.



اگر عددی مثبت مثل  $\frac{1}{3}$  در ضابطه ضرب شود، تغییری در یکنوایی ایجاد نمی‌کند.

۱۰۴. گزینه ۳

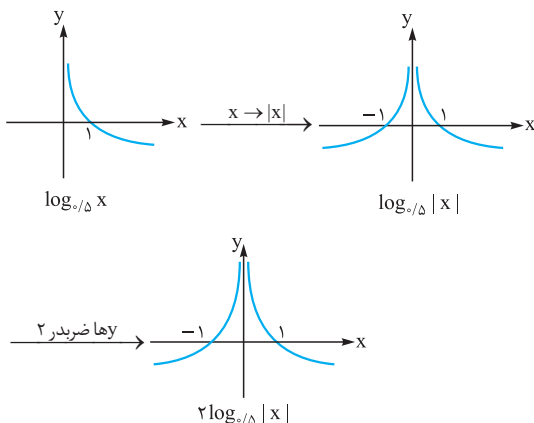
**نکته**

$\log x^2 = 2 \log |x|$  (توان زوج)

$\log x^3 = 3 \log x$  (توان فرد)

ابتدا ضابطه را ساده می‌کنیم:  $f(x) = \log_{5/8} x^2 = 2 \log_{5/8} |x|$

نمودار  $f$  را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:



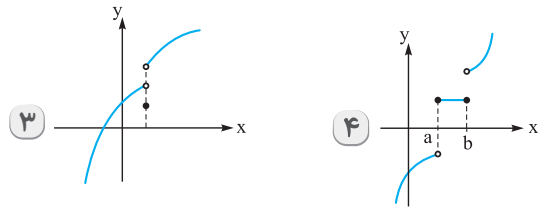
چون تابع  $f$ ، در قسمت‌هایی صعودی اکید ( $x < 0$ ) و در قسمت‌هایی نزولی اکید است ( $x > 0$ )، پس غیریکنواست.

۱۰۵. گزینه ۴ دامنه تابع  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\cap} x > 0 \Rightarrow D_f = (0, +\infty)$$

ضابطه  $f$  را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{|x| \sqrt{x}} = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x > 0} f(x) = \frac{1}{x}$$



در گزینه‌های ۱ و ۲ وقتی از چپ به راست حرکت می‌کنیم، نمودار فقط رو به بالا رفته، پس صعودی اکیدند.

در ۳، ابتدا نمودار رو به بالا رفته و سپس در یک نقطه به پایین آمده، پس غیریکنواست.

در ۴، نمودار یا رو به بالا رفته یا ثابت بوده، پس صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۹۷. گزینه ۲ تابع خطی زمانی اکیداً صعودی است که شیبش مثبت باشد، پس:

$$1 - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 1 \Rightarrow |a| < 1 \Rightarrow -1 < a < 1$$

عرض از مبدأ خط  $f(x) = (1 - a^2)x + (a + 3)$  می‌شود  $a + 3$ .

به کمک  $-1 < a < 1$ ، محدوده عرض از مبدأ درمی‌آید:

$$-1 < a < 1 \xrightarrow{+3} 2 < a + 3 < 4 \Rightarrow 2 < \text{عرض از مبدأ} < 4$$

۹۸. گزینه ۲ گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱  $y = \sqrt{-2x + 4}$  با شرط  $a < 0$ ، اکیداً نزولی است، پس اکیداً نزولی می‌باشد.

۲ چون توان فرد است، منفی را می‌توانیم به داخل پرانتز ببریم:

$$y = -(2 - x)^3 - 1 = (x - 2)^3 - 1$$

توابع به فرم  $y = a(x + \alpha)^3 + \beta$  با شرط  $a > 0$  اکیداً صعودی هستند، پس این تابع اکیداً صعودی است.

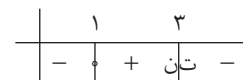
۳ تابع لگاریتمی  $y = \log_{1/2} x$ ، چون مبنایش بین صفر و ۱ است، اکیداً نزولی است.

۴ می‌دانیم  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . پس با تابع نمایی  $y = (\frac{\sqrt{3}}{2})^x$  طرفیم که چون پایه‌اش بین ۰ و ۱ است، تابعی اکیداً نزولی محسوب می‌شود.

۹۹. گزینه ۲ تابع نمایی  $y = A^x$  با شرط  $A > 1$ ، تابعی صعودی (یا اکیداً صعودی) است. پس در تابع  $y = (\frac{k+1}{3-k})^x$ ، باید پایه بزرگتر از ۱ باشد:

$$\frac{k+1}{3-k} > 1 \Rightarrow \frac{k+1}{3-k} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{k+1-3+k}{3-k} > 0 \Rightarrow \frac{2k-2}{3-k} > 0$$

ریشه صورت ۱ و ریشه مخرج ۳ است. جدول تعیین علامت می‌کشیم:



قسمت‌های مثبت را می‌خواهیم:  $k \in (1, 3)$

$$\max(b - a) = 3 - 1 = 2$$

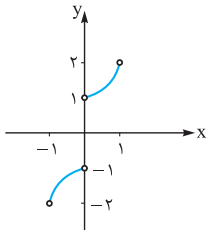
۱۰۰. گزینه ۲ برای آن که تابع  $y = A^x$  نزولی باشد باید  $0 < A \leq 1$  باشد.

**اشاره** اگر در صورت سؤال، می‌گفت تابع نمایی فلان، نزولی باشد، شرطمان  $0 < A < 1$  می‌شد. پس در تابع  $f(x) = (\frac{3m+1}{4})^x$  برای

$$0 < \frac{3m+1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} 0 < 3m+1 \leq 4$$

$$\xrightarrow{-1} -1 < 3m \leq 3 \xrightarrow{-3} -\frac{1}{3} < m \leq 1$$

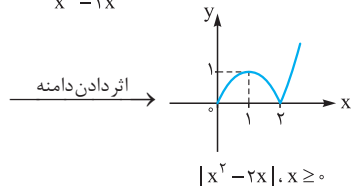
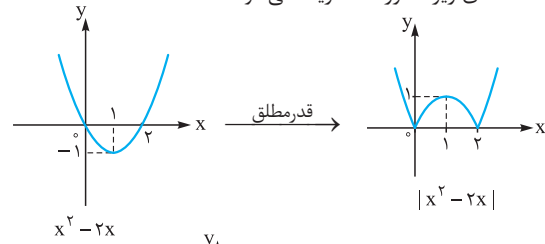
پس  $m$  دو مقدار صحیح دارد: صفر و ۱



تابع را در دامنه  $\{0\} - (-1, 1)$  رسم می‌کنیم:

نمودار  $f$  فقط رو به بالا حرکت کرده، پس صعودی اکید (یا صعودی) است.

**۱۰۹. گزینه ۳** ابتدا سهمی  $y = x(x-2)$  را با داشتن ریشه‌هایش  $(x=2, x=0)$  و دهانه رو به بالا رسم می‌کنیم. بعد که قدرمطلق را اثر می‌دهیم، قسمت‌های زیر محور  $x$ ها قرینه می‌شوند:



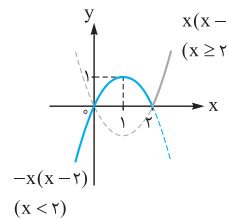
نمودار آخر در بازه  $(1, 2)$  یا  $[1, 2]$  نزولی اکید است، پس:

$$\max(b-a) = 2-1 = 1$$

**۱۱۰. گزینه ۳** اول تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

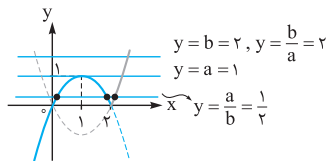
$$y = x|x-2| = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ -x(x-2) & x < 2 \end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های صفر و ۲ هستند. نمودار را رسم می‌کنیم:



تابع رسم‌شده در بازه  $[1, 2]$  نزولی اکید است.

خطوط داده‌شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



فقط خط  $y = \frac{a}{b}$  یعنی  $y = \frac{1}{3}$

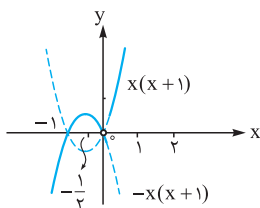
نمودار  $f$  در ۳ نقطه قطع می‌کند.

**۱۱۱. گزینه ۲** تابع  $\frac{f}{g}$  را می‌نویسیم:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + x^2}{|x|} = \begin{cases} \frac{x^2 + x^2}{x} & x > 0 \\ \frac{x^2 + x^2}{-x} & x < 0 \end{cases}$$

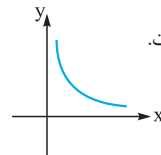
$$= \begin{cases} x^2 + x & x > 0 \\ -(x^2 + x) & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(x+1) & x > 0 \\ -x(x+1) & x < 0 \end{cases}$$

هر دو ضابطه سهمی با ریشه‌های  $x=0$  و  $x=-1$  هستند. رأس هر دو سهمی هم میانگین ریشه‌ها یعنی  $x = -\frac{1}{2}$  است.



نمودار  $\frac{f}{g}$  را رسم می‌کنیم:

پس تابع  $\frac{f}{g}$  در بازه  $(-\frac{1}{2}, 0)$  نزولی است.

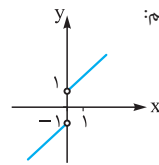


پس ضابطه  $f$ ، به صورت  $f(x) = \frac{1}{x}$  با دامنه  $x > 0$  است.

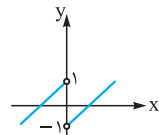
نمودارش به شکل روبه‌رو است:

پس  $f$ ، همواره نزولی است.

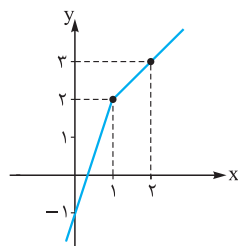
**۱۰۶. گزینه ۲** نمودار هر یک از گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



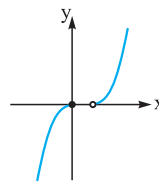
$$f(x) = \frac{|x|}{x} + x = \begin{cases} 1+x & x > 0 \\ -1+x & x < 0 \end{cases}$$



$$f(x) = x - \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x-1 & x > 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$$



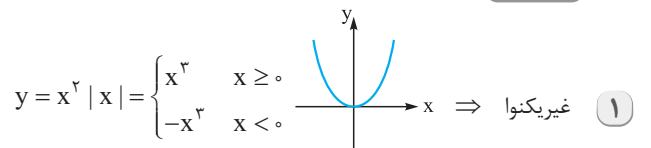
$$f(x) = 2x - |x-1| = \begin{cases} x+1 & x \geq 1 \\ 3x-1 & x < 1 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 - 1 & x > 0 \end{cases}$$

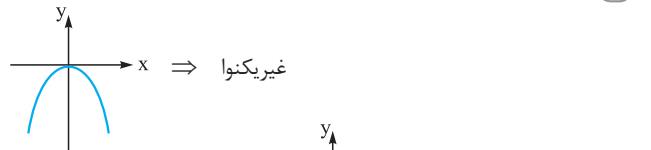
با توجه به نمودارها،  $f(x) = x - \frac{x}{|x|}$  غیریکنوا است و بقیه تابع‌ها صعودی اکید هستند.

**۱۰۷. گزینه ۴** نمودار تمام توابع را رسم می‌کنیم:



$$y = x^2|x| = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ -x^3 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{غیریکنوا} \quad 1$$

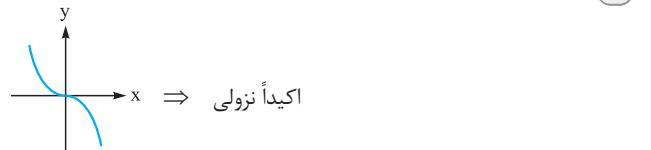
شکل بالا را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم.  $y = -x^2|x| \Rightarrow$



غیریکنوا  $\Rightarrow$

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی} \quad 3$$

شکل بالا را نسبت به محور  $x$ ها قرینه می‌کنیم.  $y = -x|x| \Rightarrow$



اکیداً نزولی  $\Rightarrow$

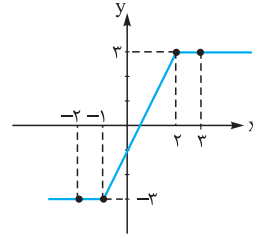
**۱۰۸. گزینه ۱** با توجه به ریشه قدرمطلق  $(x=0)$ ، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x) = x|x| + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x(x) + \frac{x}{x} & x > 0 \\ x(-x) + \frac{x}{-x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ -x^2 - 1 & x < 0 \end{cases}$$

۱۱۲. گزینه ۳ نمودار رسم می‌کنیم. اگر یادتان باشد شکل این توابع، آبخاری می‌شود! کافی است چهارتا نقطه بدهیم:

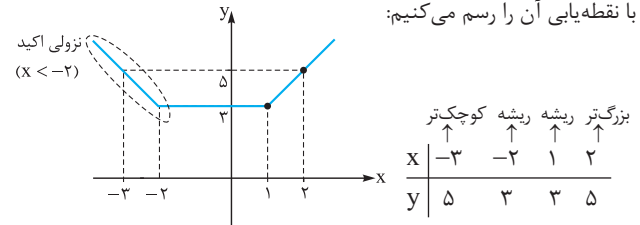
	کوچکتر	ریشه	ریشه	بزرگتر
x	-۲	-۱	۲	۳
y	-۳	-۳	۳	۳

این تابع در بازه  $[-1, 2]$  یا  $(-1, 2)$  اکیداً صعودی است.



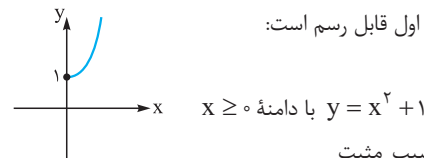
**اشاره** اگر جای «اکیداً صعودی» می‌گفت «صعودی»، جواب  $\mathbb{R}$  می‌شد.

۱۱۳. گزینه ۱ تابع  $f(x) = |x+2| + |x-1|$  یک تابع گلدانی است. با نقطه‌یابی آن را رسم می‌کنیم:

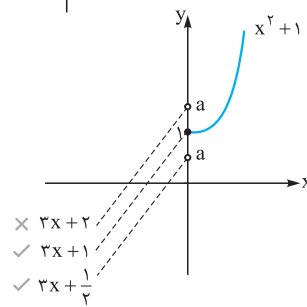


پس  $f$  در بازه  $(-\infty, -2)$  نزولی اکید است.

۱۱۴. گزینه ۲ ضابطه اول قابل رسم است:



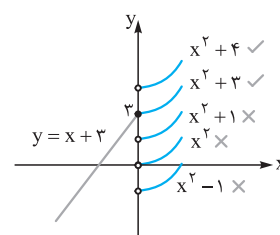
ضابطه دوم، یک خط با شیب مثبت می‌باشد (یعنی صعودی است) که عرض از مبدأش  $a$  است. باید  $a \leq 1$  انتخاب شود تا تابع صعودی اکید باشد:



پس حداکثر مقدار  $a$  برابر با ۱ است.

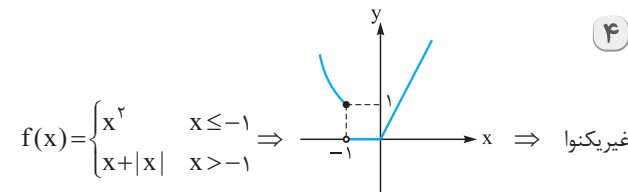
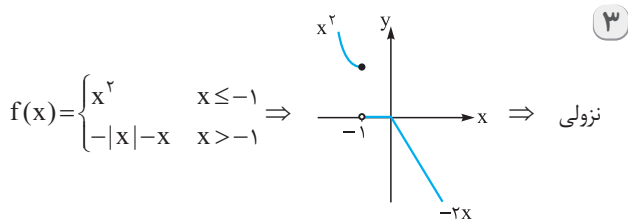
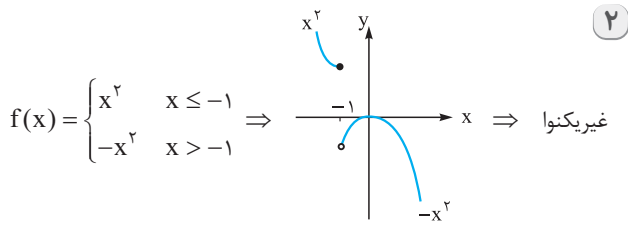
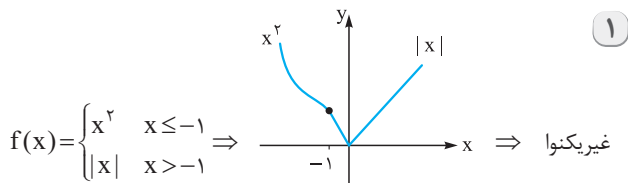
۱۱۵. گزینه ۳ به ازای  $x \leq 0$ ، عبارت داخل قدرمطلق منفی می‌شود، پس ضابطه بالا این‌جوری می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x^2+k & x > 0 \end{cases}$$



ضابطه اول را می‌توانیم رسم کنیم. ضابطه دوم هم قسمت راست سهمی  $x^2$  است که با توجه به مقدار  $k$ ، از مبدأ بالا یا پایین می‌رود. با توجه به نمودار، فقط وقتی  $k \geq 3$  انتخاب شود، نمودار رو به بالا می‌رود و صعودی اکید می‌شود.

۱۱۶. گزینه ۳ نمودار تابع  $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq -1 \\ g(x) & x > -1 \end{cases}$  را به ازای هر کدام از گزینه‌ها رسم می‌کنیم:



۱۱۷. گزینه ۳ در توابع  $|x|$  خط  $\pm$  خط  $y = \pm x$  شرط اکیداً یکنوایی آن است که شیب هر دو ضابطه، هم‌علامت باشد.

۱)  $y = |2x| + x = \begin{cases} 2x+x & x \geq 0 \\ -2x+x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

۲)  $y = |2x-4| - x = \begin{cases} (2x-4) - x & x \geq 2 \\ (-2x+4) - x & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & x \geq 2 \\ -3x+4 & x < 2 \end{cases}$

۳)  $y = |x+1| + 2x = \begin{cases} (x+1) + 2x & x \geq -1 \\ (-x-1) + 2x & x < -1 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & x \geq -1 \\ x-1 & x < -1 \end{cases}$

۴)  $y = |x-1| + x = \begin{cases} (x-1) + x & x \geq 1 \\ (-x+1) + x & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$

فقط در ۳، شیب هر دو ضابطه هم‌علامت (هر دو مثبت) شد، پس اکیداً یکنواست.

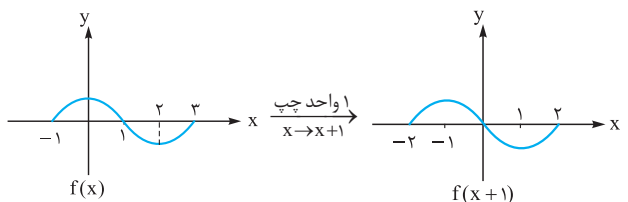
**اشاره** در ۴، شیب یکی از ضابطه‌ها ۲ و شیب دیگری صفر شد، پس صعودی (یکنوا) است ولی اکید نیست.

۱۱۸. گزینه ۳ برای آن که تابع  $|x|$  خط  $\pm$  خط  $y = \pm ax + 4$  تابعی غیریکنوا باشد باید شیب ضابطه‌هایش هم‌علامت نباشد.

با توجه به ضابطه  $y = ax + 4 - |\frac{x}{p} + 1|$ ، شیب ضابطه‌ها  $a - \frac{1}{p}$  و  $a + \frac{1}{p}$  است. برای هم‌علامت نبودن، باید ضربشان منفی شود:

$$(a - \frac{1}{p})(a + \frac{1}{p}) < 0 \rightarrow -\frac{1}{p} < a < \frac{1}{p}$$

۱۱۹. گزینه ۴ مرحله به مرحله از نمودار  $f(x)$  به  $f(-x+1)$  می‌رسیم.



۱۲۲. گزینه ۲ ضابطه اول f را ساده تر می نویسیم:

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

پس کل ضابطه f به این صورت می شود:

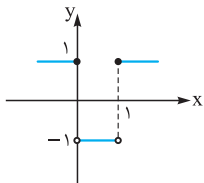
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ادغام ضابطه اول و سوم}} \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

با داشتن ضابطه  $g(x) = x^2 - x$ ، ضابطه fog را تشکیل می دهیم.

جای تمام x های ضابطه f،  $x^2 - x$  قرار می دهیم:

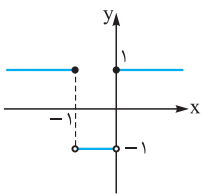
$$f(g(x)) = \begin{cases} 1 & x^2 - x \geq 0 \\ -1 & x^2 - x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \text{ یا } x \leq 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

نمودار fog را رسم می کنیم:



نمودار بالا را ۱ واحد به چپ می بریم تا به

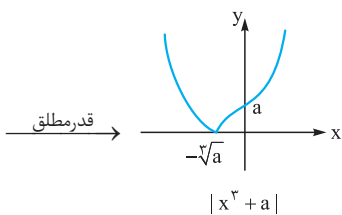
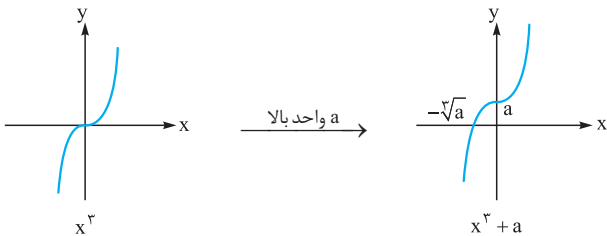
نمودار  $(fog)(x+1)$  برسیم:



تابع نهایی در بازه  $(-1, +\infty)$  رو به بالا یا ثابت است، پس صعودی است. در نتیجه کمترین مقدار a برابر -۱ است.

۱۲۳. گزینه ۲ نمودار تابع  $y = x^3 + a$ ، همان نمودار تابع  $y = x^3$

که a واحد بالا (چون  $a \in \mathbb{N}$ ) رفته است. پس نمودار  $f(x) = |x^3 + a|$  این شکلی می شود:



برای به دست آوردن محل برخورد با محور x ها، y را صفر می دهیم:

$$x^3 + a = 0 \Rightarrow x^3 = -a \Rightarrow x = -\sqrt[3]{a}$$

تابع نهایی در بازه  $(-\infty, \sqrt[3]{a}]$  و هر بازه ای که زیرمجموعه اش باشد، نزولی اکید است.

پس الان  $(-\infty, a-2)$  باید زیرمجموعه  $(-\infty, \sqrt[3]{a})$  باشد، یعنی  $a-2$  باید کوچک تر یا مساوی از  $-\sqrt[3]{a}$  باشد:  $a-2 \leq -\sqrt[3]{a} \Rightarrow a + \sqrt[3]{a} - 2 \leq 0$ .

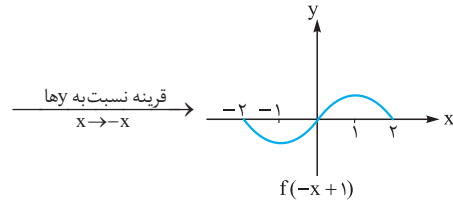
برای حل نامعادله، تغییر متغیر  $t = \sqrt[3]{a}$  را می دهیم:

$$t^3 + t - 2 \leq 0 \xrightarrow{\text{بر } t-1 \text{ بخش پذیر}} (t-1)(t^2 + t + 2) \leq 0$$

همواره مثبت

$$\Rightarrow t \leq 1 \xrightarrow{t = \sqrt[3]{a}} \sqrt[3]{a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 1$$

پس a فقط یک مقدار طبیعی  $a = 1$  را می تواند داشته باشد.

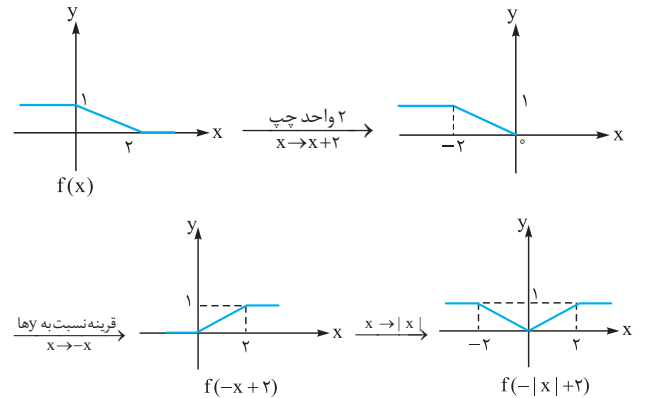


تابع نهایی در بازه های  $[1, 2]$  و  $[-2, -1]$  اکیداً نزولی است.

۱۲۰. گزینه ۴ با توجه به ضابطه  $g(x) = -|x| + 2$ ، ضابطه fog به صورت مقابل می شود:

$$f(g(x)) = f(-|x| + 2)$$

مرحله به مرحله از نمودار  $f(x)$  به  $f(-|x| + 2)$  می رسمیم.



نمودار نهایی در بین گزینه های داده شده در بازه  $(1, 5)$  صعودی است (چون یا ثابت بوده یا رو به بالا حرکت کرده).

۱۲۱. گزینه ۴ اگر جای  $x^3$ ،  $|x|$  را بنویسیم، ضابطه f ساده می شود:

$$f(x) = \frac{|x| + x^3}{1 + |x|} = \frac{|x| + |x|^3}{1 + |x|} = \frac{|x|(1 + |x|^2)}{1 + |x|} = |x|$$

با توجه به این که مخرج f ریشه نداشت، پس دامنه هم  $\mathbb{R}$  می ماند.

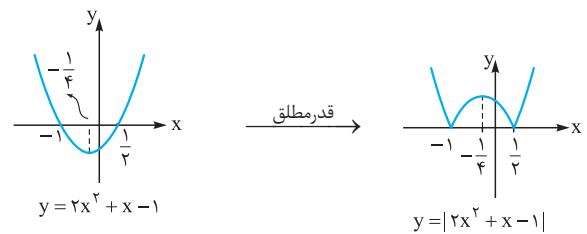
با توجه به  $f(x) = |x|$  و  $g(x) = 2x^3 + x - 1$ ، ضابطه fog را تشکیل می دهیم:

$$f(g(x)) = |g(x)| = |2x^3 + x - 1|$$

اول سهمی  $y = 2x^3 + x - 1$  را رسم می کنیم و بعد قدرمطلق را اثر می دهیم. با توجه به رابطه  $a + c = b$ ، ریشه های سهمی  $-1$  و  $\frac{1}{4}$  هستند.

$$x_S = \frac{-1 + \frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{4}$$

طول رأس برابر است با:



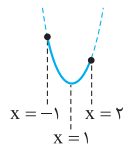
با توجه به منفی بودن  $-a^2$  و  $-b^2$ ، باید دنبال یک بازه دو سر منفی باشیم.

تابع نهایی در بازه  $[-1, -\frac{1}{4}]$  صعودی است، پس:

$$\begin{cases} -a^2 = -1 \Rightarrow a = \pm 1 \\ -b^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2} \end{cases}$$

بیشترین مقدار  $b - a$  زمانی است که  $b = \frac{1}{2}$  و  $a = -1$  باشد:

$$\frac{1}{2} - (-1) = \frac{3}{2} = 1.5$$



بازه  $[-1, 2]$  را روی سهمی مشخص می‌کنیم:

قسمت باقی‌مانده، ابتدا نزولی و سپس صعودی است.

**۱۲۸. گزینه ۴** دامنه تابع از حل نامعادله  $|x-1| < 2$  به دست می‌آید:

$$|x-1| < 2 \Rightarrow -2 < x-1 < 2 \xrightarrow{+1} -1 < x < 3$$

ریشه‌های سهمی  $f(x) = x^2 - 2x - 3$  را حساب می‌کنیم:

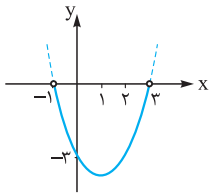
$$(x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$x_S = \frac{3+(-1)}{2} = 1$$

طول رأس هم میانگین ریشه‌ها است:

$$y_S = f(1) = -4$$

سهمی را رسم می‌کنیم:



در دامنه داده‌شده، سهمی غیریکنوا است

و چون زیر محور  $x$  هاست، پس مقادیرش

منفی است.

**۱۲۹. گزینه ۴** طول رأس سهمی برابر است با:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{2m+1}{2}$$

ضریب  $x^2$  مثبت است، پس دهانه سهمی رو به بالاست:



$$x_S = \frac{2m+1}{2}$$

برای آن که سهمی در بازه  $[-1, 2]$  غیریکنوا باشد،

باید  $x_S$  در این بازه قرار گیرد:

$$-1 < x_S < 2 \Rightarrow -1 < \frac{2m+1}{2} < 2$$

$$\xrightarrow{\times 2} -2 < 2m+1 < 4 \xrightarrow{-1} -3 < 2m < 3$$

$$\xrightarrow{\div 2} -\frac{3}{2} < m < \frac{3}{2}$$

**۱۳۰. گزینه ۲** اول طول رأس سهمی  $y = (\frac{1}{m})x^2 - x + 3$  را پیدا

می‌کنیم:

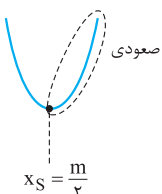
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(\frac{1}{m})} = \frac{m}{2}$$

چون علامت  $a$  را نداریم، باید در دو حالت بررسی کنیم:

(۱) ضریب  $x^2$  یعنی  $\frac{1}{m}$  مثبت باشد

( $m > 0$ ). در این حالت سهمی این‌شکلی

است:



$$x_S = \frac{m}{2}$$

برای آن که در بازه  $[1, +\infty)$  صعودی باشد باید ۱ روی رأس باشد یا بعد از

$$1 \geq \frac{m}{2} \Rightarrow m \leq 2$$

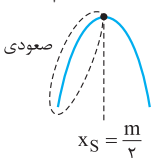
رأس، پس:

از اشتراک دو شرط  $m \leq 2$  و  $m > 0$  به  $0 < m \leq 2$

می‌رسیم.

(۲) ضریب  $x^2$  یعنی  $\frac{1}{m}$  منفی باشد ( $m < 0$ ). در این

حالت سهمی این‌شکلی است:



$$x_S = \frac{m}{2}$$

**۱۲۴. گزینه ۲** زوج مرتب‌ها را از  $x$  کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(1, 1), (\sqrt{2}, m^2 - 2), (3, 6), (1, 0), (2, 0)$$

در تابع اکیداً صعودی، با افزایش  $x$ ها، باید  $y$ ها هم زیاد شوند:

$$1 < m^2 - 2 < 6 < 2 < 0$$

فقط باید  $1 < m^2 - 2 < 6$  را حل کنیم:

$$1 < m^2 - 2 < 6 \xrightarrow{+2} 3 < m^2 < 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} < |m| < 2\sqrt{2} \xrightarrow{\begin{matrix} \sqrt{3}=1/\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}=2/\sqrt{2} \end{matrix}} \begin{cases} 1/\sqrt{3} < m < 2/\sqrt{2} \\ \text{یا} \\ -2/\sqrt{2} < m < -1/\sqrt{3} \end{cases}$$

پس  $m$  فقط دو مقدار صحیح  $\pm 2$  را می‌گیرد.

**۱۲۵. گزینه ۴** زوج مرتب‌ها را از  $x$  کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$(-1, a+1), (1, 3a+1), (2, 4a+3)$$

در تابع صعودی، با افزایش  $x$ ها، باید  $y$ ها یا زیاد شوند یا ثابت بمانند:

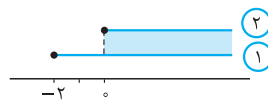
$$\underbrace{a+1 \leq 3a+1}_{(1)} \leq \underbrace{3a+1 \leq 4a+3}_{(2)}$$

نامعادله بالا به دو نامعادله تقسیم می‌شود:

$$1) a+1 \leq 3a+1 \Rightarrow 2a \geq 0 \Rightarrow a \geq 0$$

$$2) 3a+1 \leq 4a+3 \Rightarrow a \geq -2$$

اشتراک می‌گیریم:



$$(1) \cap (2) = a \geq 0$$

**۱۲۶. گزینه ۳** برای تشکیل  $f+g$ ، اول دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{-3, 1, 5\}$$

در  $x$ های مشترک، مقدار  $f+g$  را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x = -3: f(-3) + g(-3) &= m + 12 \\ x = 1: f(1) + g(1) &= (m^2 - 1) + 1 = m^2 \\ x = 5: f(5) + g(5) &= -m + 2 \end{aligned}$$

در تابع نزولی با افزایش  $x$ ها، باید مقادیر  $y$  کم شوند یا ثابت بمانند:

$$\underbrace{-m+2 \leq m^2}_{(1)} \leq \underbrace{m^2 \leq m+12}_{(2)}$$

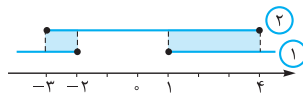
دو نامعادله را حل می‌کنیم:

$$1) m^2 \geq -m+2 \Rightarrow m^2 + m - 2 \geq 0 \Rightarrow (m+2)(m-1) \geq 0 \xrightarrow{\text{نابین ریشه‌ها}} m \geq 1 \text{ یا } m \leq -2$$

$$2) m^2 \leq m+12 \Rightarrow m^2 - m - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (m-4)(m+3) \leq 0 \xrightarrow{\text{بین}} -3 \leq m \leq 4$$

اشتراک می‌گیریم:



$$(1) \cap (2) = [-3, -2] \cup [1, 4]$$

$$\xrightarrow{\text{مقدار صحیح}} \{-3, -2, 1, 2, 3, 4\}$$

**۱۲۷. گزینه ۲** طول رأس سهمی  $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$  مهم است:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

دهانه هم که رو به بالاست. پس شکلش این‌جوری است:



چون می‌خواهیم تابع اکیداً یکنوا باشد، پس تابع ما نباید تابع ثابت باشد.

برای آن که تابع  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  ثابت نباشد، باید شرط  $ad - bc \neq 0$  را داشته

باشد، پس در تابع  $f(x) = \frac{x+1}{2x-a}$  باید:

$$(1)(-a) - (1)(2) \neq 0 \Rightarrow -a - 2 \neq 0 \Rightarrow a \neq -2$$

از دو شرط  $a \leq 2$  و  $a \neq -2$  به مجموعه  $(-\infty, 2] - \{-2\}$  می‌رسیم.

۱۳۶. گزینه ۳ از آن جایی که تابع هموگرافیک  $f(x) = \frac{2x+b}{3x+d}$  در

بازه‌های  $(-\infty, -2)$  و  $(-2, +\infty)$  یکنوا اکید است، نتیجه می‌گیریم عدد  $-2$ ، ریشهٔ مخرج است:

تا این‌جا ضابطهٔ  $f$  به شکل  $f(x) = \frac{2x+b}{3x+6}$  درآمد. این تابع، محور  $x$ ها را در

نقطه‌ای به طول ۱ قطع می‌کند:

$$f(1) = 0 \Rightarrow 2+b=0 \Rightarrow b = -2$$

با جای‌گذاری  $d = 6$  و  $b = -2$ ، یکنوایی گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱ نزولی اکید  $\rightarrow$  نمایی با پایهٔ بین صفر و ۱  $y = 6^{-x} = (\frac{1}{6})^x$

۲ نزولی اکید  $\rightarrow$  نمودار  $y = -2x^3$

۳  $y = 6x - 2|x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 8x & x < 0 \end{cases}$

چون شیب هر دو ضابطه مثبت شد و تابع ناپیوستگی ندارد، پس صعودی اکید است.

۴ نزولی اکید  $\rightarrow$  شیب منفی  $y = -2x + 6$

پس جواب ۳ است.

۱۳۷. گزینه ۴ چون  $f$  نزولی است، پس بعد از حذف  $f$ ، جهت نامساوی

عوض می‌شود:  $2a - 1 < 5 - a \xrightarrow{\text{تغییر جهت}} 2a - 1 > 5 - a$

$$\Rightarrow 3a < 6 \Rightarrow a < 2$$

۱۳۸. گزینه ۳ برای دامنهٔ تابع رادیکالی  $g$ ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی

صفر قرار دهیم:  $f(2x+1) - f(x-2) \geq 0 \Rightarrow f(2x+1) \geq f(x-2)$

حالا باید بگوییم چون  $f$  نزولی است، پس با حذف  $f$ ها، جهت عوض می‌شود:

$$f(2x+1) \geq f(x-2) \xrightarrow{\text{نزولی } f} 2x+1 \leq x-2 \Rightarrow x \leq -3$$

پس،  $D_g = (-\infty, -3]$ .

۱۳۹. گزینه ۱  $f(x) = \frac{-x+1}{x}$  یک تابع هموگرافیک است.  $ad - bc$

$$(-1)(0) - (1)(1) = -1$$

را حساب می‌کنیم:

ریشهٔ مخرج هم  $x = 0$  است.

پس این تابع در بازه‌های قبل و بعد ریشهٔ مخرج، اکیداً نزولی است.

با توجه به این‌که  $1+x^4$  و  $3+x^2$  هر دو بزرگ‌تر از صفر هستند، پس هر دو

در شاخهٔ  $(0, +\infty)$  قرار دارند. می‌خواهیم نمودار تابع  $f(1+x^4)$  بالای نمودار

$$f(1+x^4) > f(3+x^2) \quad \text{باشد: } f(3+x^2)$$

چون  $f$  اکیداً نزولی است (در شاخهٔ  $(0, +\infty)$ )، پس با حذف  $f$ ها، جهت عوض

$$1+x^4 < 3+x^2 \Rightarrow x^4 - x^2 - 2 < 0$$

می‌شود:

$$\xrightarrow{\text{جمله مشترک}} (x^2 - 2)(x^2 + 1) < 0$$

همواره مثبت

که با کمی دقت متوجه می‌شویم که امکان ندارد تابع در بازهٔ  $[1, +\infty)$  صعودی

باشد، چون تابع در بازهٔ  $[\frac{m}{p}, +\infty)$  نزولی است، هر چه که باشد باز هم امکان

ندارد که با  $(1, +\infty)$  اشتراکی پیدا نکند! پس این حالت کلاً اتفاق نمی‌افتد.

حالا بین جواب‌های دو حالت، اجتماع می‌گیریم:  $(0, 2] \cup \emptyset = (0, 2]$

۱۳۱. گزینه ۲ ضابطهٔ سهمی را با داشتن ریشه‌هایش می‌نویسیم:

$$y = a(x-6)(x+2)$$

سهمی رسم‌شده از نقطهٔ  $(0, 6)$  می‌گذرد، پس:  $a = \frac{-1}{\cancel{6}} \Rightarrow a = -\frac{1}{6}$

در نتیجه ضابطهٔ سهمی به این شکل می‌شود:

$$f(x) = \frac{-1}{6}(x-6)(x+2) = \frac{-1}{6}x^2 + 2x + 6$$

حالا ضابطهٔ  $g$  را تشکیل می‌دهیم:  $g(x) = kx^2 + 4(\frac{-1}{6}x^2 + 2x + 6)$

$$= kx^2 - 2x^2 + 8x + 24 = (k-2)x^2 + 8x + 24$$

می‌دانیم توابع درجه ۲، یکنوا نیستند، پس برای آن‌که  $g$  یکنوا باشد باید ضریب

$$k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

۱۳۲. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:  $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

پس تابع در بازه‌های  $(-\infty, 3)$  و  $(3, +\infty)$  یکنواست.

با توجه به بازهٔ یکنوایی  $(-\infty, a)$ ، حداکثر  $a$  برابر ۳ است. (دقت کنید که چون

$$ad - bc = -7 < 0$$

پس تابع روی هر کدام از بازه‌ها نزولی است.)

۱۳۳. گزینه ۱ ریشهٔ مخرج تابع  $y = \frac{-1}{x-2}$  را پیدا می‌کنیم.

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس تابع در بازه‌های  $(-\infty, 2)$  و  $(2, +\infty)$  اکیداً یکنواست.

با توجه به بسته‌بودن انتهای بازهٔ  $(-\infty, a]$ ، حداکثر مقدار صحیح  $a$ ، عدد ۱

است نه ۲.

(دقت کنید که  $ad - bc = 1 > 0$ ، پس تابع در هر یک از بازه‌های

$$(-\infty, +\frac{d}{c}), (\frac{d}{c}, +\infty)$$

۱۳۴. گزینه ۱  $ad - bc$  باید مثبت باشد.

$$1 \quad y = \frac{x-1}{x+3} \Rightarrow ad - bc = 3+1 = 4 \quad \checkmark$$

$$2 \quad y = \frac{2x-3}{x+1} \Rightarrow ad - bc = 2+3 = 5 \quad \checkmark$$

$$3 \quad y = \frac{-x+1}{x+3} \Rightarrow ad - bc = -3-1 = -4 \quad \times$$

$$4 \quad y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow ad - bc = -2-1 = -3 \quad \times$$

در بین دو گزینهٔ باقی‌مانده باید چک کنیم، ریشهٔ مخرج تابع، داخل بازهٔ  $(-2, +\infty)$  نباشد.

$$1 \quad y = \frac{x-1}{x+3} \xrightarrow{x=-2} -3 \notin (-2, +\infty) \quad \times$$

$$2 \quad y = \frac{2x-3}{x+1} \xrightarrow{x=-1} -1 \in (-2, +\infty) \quad \times$$

پس جواب، ۱ است.

۱۳۵. گزینه ۴ ریشهٔ مخرج را حساب می‌کنیم:

$$2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$$

کافی است ریشهٔ مخرج در بازهٔ  $(1, +\infty)$  نباشد، پس  $\frac{a}{2}$  باید از ۱ کوچک‌تر یا

$$\frac{a}{2} \leq 1 \Rightarrow a \leq 2$$

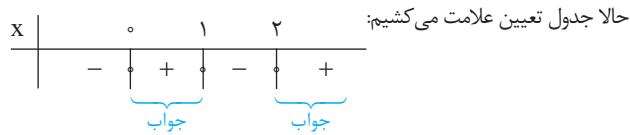
مساوی باشد:

پس: دامنه  $D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$  و شامل تمام اعداد طبیعی می‌باشد.  
**راه II** می‌توانیم برای  $f$  یک تابع ساده (مثلاً خطی) مثال بزینیم که اکیداً صعودی باشد و محور طول‌ها را در نقطه  $x = 2$  قطع کند یعنی  $f(x) = x - 2$ .

حالا دامنه تابع  $y = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$  را پیدا می‌کنیم:

$$y = \sqrt{(x^2 - x)(x - 2)} = \sqrt{x(x-1)(x-2)}$$

$$x(x-1)(x-2) \geq 0$$



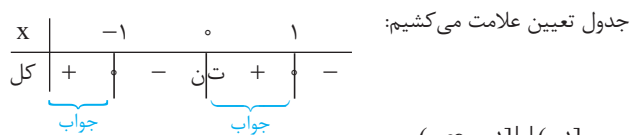
پس:  $D_g = [0, 1] \cup [2, +\infty)$   
 عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) \geq f(x)$$

$f(x) = 2^x$  تابعی اکیداً صعودی است، پس با حذف  $f$ ها، علامت برنمی‌گردد:  
 $\frac{1}{x} \geq x$

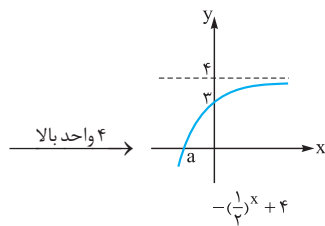
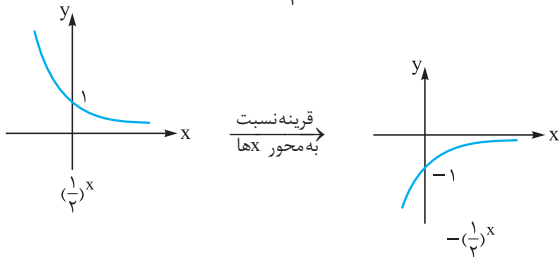
نامعادله به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x} - x \geq 0 \Rightarrow \frac{1 - x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0$$



پس:  $(-\infty, -1] \cup (0, 1]$

**گزینه ۲** نمودار تابع  $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4$  را می‌کشیم:



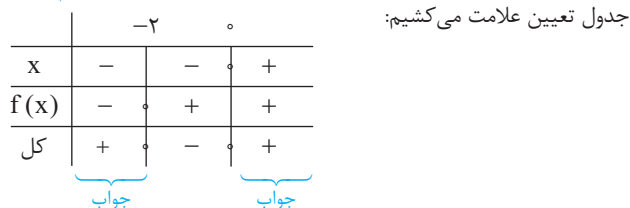
محل برخورد تابع نهایی با محور  $x$ ها مهم است:

$$-\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4 = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 4 \Rightarrow x = -2$$

پس  $f$  تابعی اکیداً صعودی با ریشه  $x = -2$  است.

برای محاسبه دامنه تابع رادیکالی  $g(x) = \sqrt{x f(x)}$ ، زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$x f(x) \geq 0$$



پس:  $D_g = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty) = \mathbb{R} - (-2, 0)$

$$\Rightarrow x^2 - 2 < 0 \Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

فقط بازه  $(-1, 1)$ ، زیرمجموعه بازه  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  است.

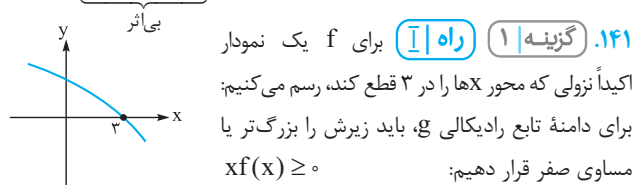
**گزینه ۱** با توجه به ضابطه  $f(x) = -x^3 + 2$ ، می‌فهمیم  $f$  تابعی اکیداً نزولی است.

نامعادله را به شکل روبه‌رو می‌نویسیم:  
 $f(f(x)) > f(x^2)$   
 با حذف  $f$ ها، جهت نامساوی عوض می‌شود:  
 $f(x) < x^2$   
 حالا جای  $f(x)$ ، ضابطه‌اش را می‌نویسیم:

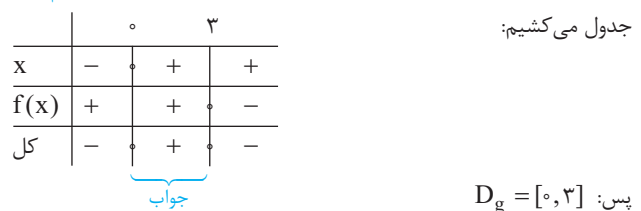
$$-x^3 + 2 < x^2 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2 > 0$$

عبارت  $x^3 + x^2 - 2$  به ازای  $x = 1$  صفر می‌شود، پس بر  $x - 1$  بخش پذیر است. اگر  $x^3 + x^2 - 2$  را بر  $x - 1$  تقسیم کنیم، خارج قسمت  $x^2 + 2x + 2$  می‌شود، پس:  
 $x^3 + x^2 - 2 > 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0$   
 چون دلتای  $x^2 + 2x + 2$  منفی و ضریب  $x^2$  اش مثبت است، پس همواره مثبت است و می‌توانیم حذفش کنیم:

$$(x - 1)(x^2 + 2x + 2) > 0 \Rightarrow x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$



برای رسم جدول تعیین علامت، ریشه‌های عبارت را پیدا می‌کنیم:



پس:  $D_g = [0, 3]$

**راه II** می‌توانیم برای  $f$  یک تابع مثال بزینیم. ساده‌ترین تابع، تابع خطی است پس  $f(x) = -x + 3$  را در نظر می‌گیریم (+۳) را برای این نوشتیم که تابع، محور  $x$ ها را در نقطه  $x = 3$  قطع کند. حالا دامنه تابع  $y = \sqrt{x f(x)}$  را پیدا می‌کنیم:

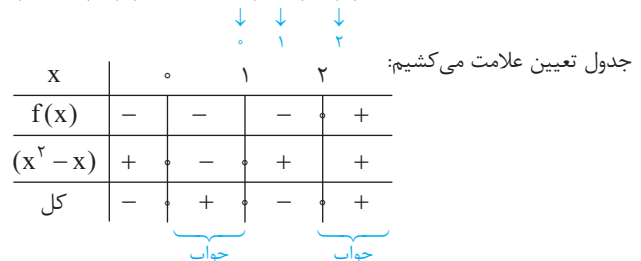
$$y = \sqrt{x(-x + 3)}$$

$$x(-x + 3) \geq 0 \Rightarrow x | \begin{matrix} -\infty & 0 & 3 & +\infty \\ - & + & - & \end{matrix} \Rightarrow 0 \leq x \leq 3$$

**گزینه ۱** **راه I**

برای  $f$  یک نمودار اکیداً صعودی که محور  $x$ ها را در ۲ قطع کند، رسم می‌کنیم:  
 برای دامنه تابع رادیکالی  $g(x) = \sqrt{(x^2 - x)f(x)}$ ، باید زیرش را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم:

$$(x^2 - x)f(x) \geq 0 \Rightarrow x(x-1)f(x) \geq 0$$







برای به دست آوردن بُرد تابع اکیداً صعودی که ناپیوستگی ندارد، مقادیر تابع را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه حساب می‌کنیم. دامنه  $\sqrt{x}$  بازه  $[0, +\infty)$  و دامنه  $f$ ، بازه  $(2, 5)$  است که اشتراکشان  $(2, 5)$  می‌شود، پس:

$$g(x) = \sqrt{x} - f(x) \xrightarrow{\text{بُرد}} \begin{cases} g(2) = \sqrt{2} - f(2) = \sqrt{2} - 3 \\ g(5) = \sqrt{5} - f(5) = \sqrt{5} + 1 \end{cases}$$

پس بردمان محدوده  $[\sqrt{2} - 3, \sqrt{5} + 1]$  است که تقریباً  $[-1/6, 3/2]$  می‌شود. الان اگر براکت بگیریم، بردمان شامل  $2, 1, 0, 1, 2, 3$  می‌شود.

**۱۵۱. گزینه ۴** دقت کنید دامنه‌های هر دو تابع محدود است. هر دو تابع را بررسی می‌کنیم.

۱) دامنه  $f$  بازه  $f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x}$   $(0, +\infty)$  است.

نمودار  $y = \frac{-1}{x}$  در این بازه به صورت روبه‌رو است:

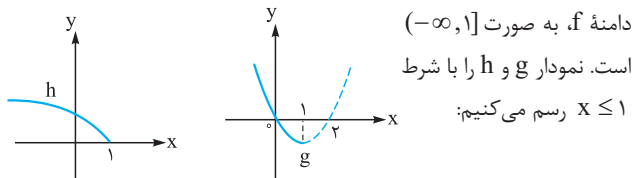
پس:  $f(x) = \frac{-1}{x} + \sqrt{x} \Rightarrow$  صعودی

۲) دامنه  $g$  بازه  $g(x) = |x| + \sqrt{-x}$   $(-\infty, 0]$  است. پس جای  $|x|$  می‌توانیم  $-x$  قرار دهیم:

$g(x) = -x + \sqrt{-x} \Rightarrow$  نزولی

**۱۵۲. گزینه ۲** تابع  $f$  را به صورت جمع دو تابع  $g(x) = x^2 - 2x$  و  $h(x) = \sqrt{1-x}$  می‌بینیم:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 2x}_{g(x)} + \underbrace{\sqrt{1-x}}_{h(x)}$$



دامنه  $f$ ، به صورت  $(-\infty, 1]$  است. نمودار  $g$  و  $h$  را با شرط  $x \leq 1$  رسم می‌کنیم:

هر دو تابع، اکیداً نزولی هستند. چون جمع دو تابع اکیداً نزولی، تابعی اکیداً نزولی است، پس  $f$  اکیداً نزولی است.

**۱۵۳. گزینه ۲** دامنه تابع  $f$  را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \\ 2\sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x \neq \pm 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [0, 1) \cup (1, +\infty)$$

در دو بازه  $[0, 1)$  و  $(1, +\infty)$ ، یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم.

۱) تابع  $y = 2\sqrt{x}$  در هر دو بازه بالا صعودی اکید است.

۲) تابع  $y = \frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$  را مرحله‌به‌مرحله بررسی می‌کنیم:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1} \xrightarrow{\text{صعودی اکید}} y = x^2 - 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \xrightarrow{\text{معکوس}} y = \frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}$$

از طرفی می‌دانیم مجموع دو تابع صعودی اکید، تابعی صعودی اکید است، پس

تابع  $f(x) = \underbrace{2\sqrt{x}}_{\text{صعودی اکید}} + \underbrace{\frac{-3}{2\sqrt{x^2 - 1}}}_{\text{صعودی اکید}}$  صعودی اکید است.

صعودی اکید

**۱۴۵. گزینه ۲** همه جملات را بررسی می‌کنیم:

الف) جمع تابع صعودی و نزولی، نامشخص است یعنی می‌تواند صعودی یا نزولی یا ثابت یا غیریکنوا شود. مثلاً اگر  $f(x) = 3x + 1$  و  $g(x) = -x - 1$  باشد، آن وقت  $(f+g)(x) = 2x$  که تابعی صعودی است.

ب) جمع صعودی اکید و صعودی، تابعی صعودی اکید است.

پ) اگر  $g$  نزولی باشد، آن‌گاه  $-g$  صعودی است، پس:

صعودی اکید = (صعودی) + صعودی اکید  $= f + (-g)$

ت) اگر  $f$  صعودی اکید و  $g$  تابعی ثابت باشد،  $fg$  می‌تواند صعودی اکید یا نزولی اکید یا ثابت باشد:

صعودی اکید  $\Rightarrow (fg)(x) = 2x \Rightarrow f(x) = x, g(x) = 2$

نزولی اکید  $\Rightarrow (fg)(x) = -2x \Rightarrow f(x) = x, g(x) = -2$

ثابت  $\Rightarrow (fg)(x) = 0 \Rightarrow f(x) = x, g(x) = 0$

پس دو جمله (ب) و (پ) درست بودند.

**۱۴۶. گزینه ۲** با فرض  $g(x) = -x^3$ ، جای  $f(-x^3)$  می‌توانیم بنویسیم  $f \circ g$

سؤال گفته  $f$  اکیداً نزولی است، از طرفی  $g(x) = -x^3$  هم اکیداً نزولی است. با توجه به این که ضرب دو عدد منفی، عددی مثبت است:  $(-)\times(-) \Rightarrow (+)$

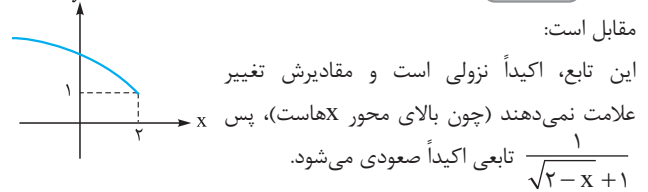
$f, g \Rightarrow f \circ g$

پس: صعودی نزولی

**۱۴۷. گزینه ۴** گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

- ۱) صعودی = صعودی + صعودی  $= f(x) + \sqrt{x}$  صعودی
- ۲) صعودی  $\Rightarrow (+)\times(-)\times(-)\times(+)$   $\Rightarrow (+)$
- ۳) نامشخص  $\Rightarrow$  نامشخص  $\times (-)$   $\Rightarrow (-)$  غیریکنوا
- ۴) نزولی  $\Rightarrow (+)\times(-)\times(+)\times(+)$   $\Rightarrow (-)$

**۱۴۸. گزینه ۱** تابع  $\sqrt{2-x} + 1$  به صورت



**۱۴۹. گزینه ۲** برای  $f$  یک ضابطه در نظر می‌گیریم؛ مثلاً  $y = -(2^x)$ .  $f$  نزولی اکید و زیر محور X هاست.

حالا دو ضابطه را تشکیل می‌دهیم و با مقایسه مقادیر در  $x = 2$  و  $x = 1$ ، وضعیت یکنوایی را مشخص می‌کنیم (چون در گزینه‌ها غیریکنوا نداریم، مشکلی پیش نمی‌آید).

اکیداً صعودی  $\Rightarrow \begin{cases} g(1) = 2 \\ g(2) = 8 \end{cases} \Rightarrow g(x) = -x, f(x) = x \cdot 2^x$

اکیداً نزولی  $\Rightarrow h(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{-2^{-x}} = \frac{1}{-(\frac{1}{2})^x} = -(2^x)$

**۱۵۰. گزینه ۱** با توجه به نمودار، تابعی اکیداً نزولی است، پس

$-f(x)$  تابعی اکیداً صعودی است. از طرفی جمع دو تابع اکیداً صعودی، تابعی اکیداً صعودی است:

$\underbrace{\sqrt{x}}_{\text{اکید صعودی}} + \underbrace{(-f(x))}_{\text{اکید صعودی}}$

دامنه به دست آوریم:

$$\left. \begin{aligned} A = -1 \Rightarrow y = 2^{-1} + \frac{-1}{2^{-1}} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ A = 2 \Rightarrow y = 2^2 + \frac{-1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{برد} = \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right]$$

پس:  $b - a = \frac{15}{4} - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{21}{4}$

**۱۵۸. گزینه ۱** تابع  $y = \sqrt{x}$  و  $y = x$  توابعی اکیداً صعودی هستند، پس مجموعه‌شان هم اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

**۱۵۴. گزینه ۲** در تابع  $f(x) = 2x + 1 + \sqrt{x-1}$  عامل  $2x + 1$

صعودی اکید و  $\sqrt{x-1}$  هم صعودی اکید است. پس  $f$  هم صعودی اکید است؛ بنابراین برای پیدا کردن برد می‌توانیم نقاط ابتدا و انتهای دامنه را در تابع قرار دهیم. دامنه تابع  $f$  برابر است با بازه  $[1, +\infty)$ ، پس بردش می‌شود:

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 + 1 + \sqrt{0} = 3 \Rightarrow f \geq 3$$

$$\Rightarrow R_f = [3, +\infty)$$

پس برد تابع  $f$  شامل اعداد طبیعی ۱ و ۲ یعنی دو عدد طبیعی نیست.

**۱۵۵. گزینه ۲** تابع  $f$  از جمع دو عبارت اکیداً صعودی تشکیل شده، پس

خودش هم اکیداً صعودی است:

$$f(x) = \underbrace{2\sqrt{2+x}}_{\text{اکیداً صعودی}} + \underbrace{(-\sqrt{-x+7})}_{\text{اکیداً صعودی}}$$

اکیداً صعودی

تابع  $f$ ، دو عبارت رادیکالی دارد، دامنه‌اش را حساب می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{2+x} \xrightarrow{\text{دامنه}} x \geq -2 \\ \sqrt{7-x} \xrightarrow{\text{دامنه}} x \leq 7 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [-2, 7]$$

چون  $f$  اکیداً صعودی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در  $x = -2$  و  $x = 7$  حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-2) = 2\sqrt{0} - \sqrt{9} = -3 \\ f(7) = 2\sqrt{9} - \sqrt{0} = 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left[-3, \underset{\substack{\downarrow \\ a}}{6}, \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{6}\right]$$

$$b - a = 6 - (-3) = 9$$

پس:

**۱۵۶. گزینه ۲** توابع  $x^3$  و  $\sqrt{-x+1}$  هر دو اکیداً نزولی هستند، پس

مجموعه‌شان هم اکیداً نزولی است:

$$f(x) = \underbrace{-x^3}_{\text{اکیداً نزولی}} + \underbrace{(\sqrt{-x+1})}_{\text{اکیداً نزولی}}$$

اکیداً نزولی

چون  $f$  اکیداً نزولی (و پیوسته) است، پس برای محاسبه برد باید مقدارش را در نقاط ابتدا و انتهای دامنه یعنی  $x = -4$  و  $x = -1$  حساب کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(-4) = -(-4)^3 + \sqrt{4+1} = 67 \\ f(-1) = -(-1)^3 + \sqrt{1+1} = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \left(\underset{\substack{\downarrow \\ a}}{3}, \underset{\substack{\downarrow \\ b}}{67}\right)$$

$$b - a = 67 - 3 = 64$$

پس:

**۱۵۷. گزینه ۴** ضابطه  $f$  را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = 2\sqrt{9\cos^2 x - 1} - 2\sqrt{9\cos^2 x - 1}$$

$$f(x) = 2\sqrt{9\cos^2 x - 1} - \frac{1}{\sqrt{9\cos^2 x - 1}}$$

توان منفی را اثر می‌دهیم:

محدوده تغییرات عبارت  $\sqrt{9\cos^2 x - 1}$  را پیدا می‌کنیم:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\text{توان } 2} 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\xrightarrow{\times 9} 0 \leq 9\cos^2 x \leq 9 \xrightarrow{-1} -1 \leq 9\cos^2 x - 1 \leq 8$$

$$\xrightarrow{\text{فرجه } 3} -1 \leq \sqrt{9\cos^2 x - 1} \leq 2$$

با فرض  $A = \sqrt{9\cos^2 x - 1}$ ، می‌دانیم:  $-1 \leq A \leq 2$ .

توابع  $y = 2^A$  و  $y = -\frac{1}{2^A}$ ، توابعی صعودی و پیوسته هستند، پس مجموعه‌شان

$$y = 2^A + \frac{-1}{2^A}$$

نیز صعودی و پیوسته است:

برای به دست آوردن برد این تابع، کافی است مقدار تابع را در نقطه ابتدا و انتهای