

فهرست

FILM	پاسخ	درسنامه و سؤالات	
36 min	۶۸	۶ تا ۱۷	فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال
62 min	۷۵	۱۸ تا ۳۲	فصل دوم: قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن
75 min	۸۶	۳۳ تا ۵۲	فصل سوم: چندضلعی‌ها
57 min	۱۰۱	۵۳ تا ۶۶	فصل چهارم: تجسم فضایی

نمونه سؤال امتحانی



۱۱۲	آزمون ۱: نوبت اول
۱۱۳	آزمون ۲: نوبت دوم
۱۱۴	آزمون ۳: نوبت دوم
۱۱۶	پاسخ‌نامه تشریحی آزمون ۱ تا ۳

بارم‌بندی درس هندسه ۱

شماره فصل	نوبت اول	نوبت دوم
اول	۹	۳
دوم	۱۱	۴
سوم	-	۷
چهارم	-	۶
جمع	۲۰	۲۰

1

بخش



درستنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

ترسیم‌های هندسی واستدلال

فصل اول هندسه (۱) در امتحان نوبت اول ۹ نمره و در امتحان نوبت دوم و شهریور ۳ نمره دارد.

فصل ۱



برای استفاده از فیلم آموزشی شب امتحان این فصل QR-code مقابل را اسکن کنید.

فیلم
شب
امتحان

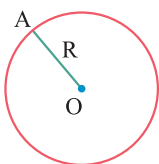
ترسیم‌های هندسی

صفحه ۱۰ تا ۱۶ کتاب درسی

بسته اول

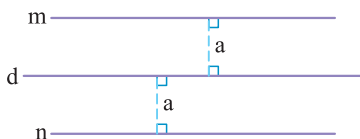


دایره



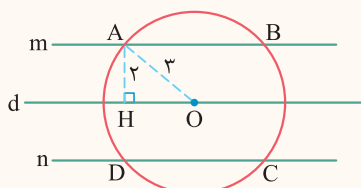
مجموعه همه نقاطی در صفحه که از یک نقطه ثابت مانند O (در همان صفحه)، به فاصله معلومی مانند R قرار دارند، دایره گفته می‌شود. O را مرکز و R را شعاع دایره می‌نامند.

مجموعه نقاطی که از یک خط معلوم به فاصله ثابتی هستند



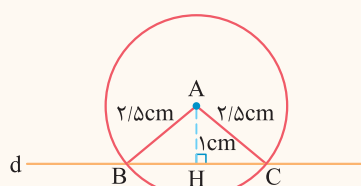
همه نقطه‌هایی که از خط معلوم d به فاصله ثابت a واقع‌اند، دو خط موازی (خط‌های m و n) و به فاصله a از خط d هستند.

سؤال نقطه O روی خط d واقع است. همه نقاطی را تعیین کنید که از نقطه O به فاصله ۳ واحد و از خط d به فاصله ۲ واحد هستند.



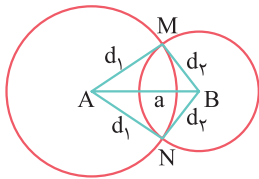
پاسخ همه نقاطی که از خط d به فاصله ۲ واحد قرار دارند روی دو خط m و n و موازی با خط d و به فاصله ۲ واحد از آن واقع‌اند. از طرفی همه نقاطی که از نقطه O به فاصله ۳ هستند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ است. مطابق شکل این دایره و خط‌های m و n در چهار نقطه A، B، C و D متقاطع‌اند که جواب هستند.

سؤال نقطه A به فاصله ۱ سانتی متر از خط d قرار دارد. نقاطی از خط d را بیابید که به فاصله ۲/۵ سانتی متر از نقطه A باشند.

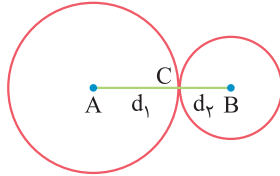


پاسخ همه نقاطی که از نقطه A به فاصله ۲/۵ سانتی متر قرار دارند، روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲/۵ سانتی متر قرار دارند. چون فاصله A از خط d برابر یک سانتی متر است، پس این دایره خط d را در دو نقطه B و C قطع می‌کند و این نقاط جواب‌اند.

تعیین نقطه‌ای که از دو نقطه ثابت به فاصله‌های معلوم باشد

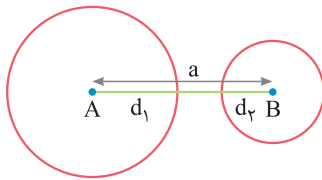


فرض کنیم A و B دو نقطه ثابت به فاصله a از یکدیگر باشند. برای یافتن نقطه‌ای که از A به فاصله d_1 و از B به فاصله d_2 باشد، دو دایره یکی به مرکز A و شعاع d_1 و دیگری به مرکز B و شعاع d_2 رسم می‌کنیم، نقطه یا نقاط تلاقی دو دایره جواب است.



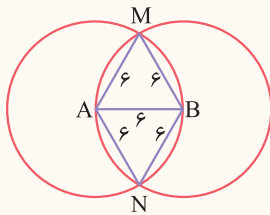
اگر $d_1 + d_2 > a$ باشد، آن‌گاه مطابق شکل فوق، دو دایره در نقاط M و N متقاطع‌اند و مسئله دو جواب دارد.

اگر $d_1 + d_2 = a$ باشد، آن‌گاه دو دایره در نقطه C مماس می‌شوند و این نقطه جواب است.



اگر $d_1 + d_2 < a$ باشد، آن‌گاه دو دایره یکدیگر را قطع نمی‌کنند و مسئله جواب ندارد.

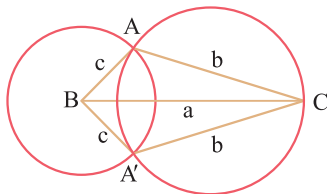
سؤال دو نقطه A و B به فاصله ۶ سانتی متر مفروض هستند. نقاطی را بیابید که از دو نقطه A و B به فاصله ۶ سانتی متر باشند.



پاسخ دایره‌هایی به مرکز A و B و شعاع‌های ۶ رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی آن‌ها یعنی M و N جواب هستند.

رسم مثلثی که سه ضلع آن معلوم است

ابتدا یکی از سه ضلع داده شده (مثلاً بزرگ‌ترین ضلع) را رسم می‌کنیم ($BC = a$)، سپس به مرکز B و شعاع c و به مرکز C و شعاع b دو دایره رسم می‌کنیم. در صورت تقاطع دو دایره، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطه A یا A' معلوم می‌شود.



اگر دو دایره متقاطع باشند، مسئله دو جواب هم‌نهشت دارد. مثلث‌های ABC و A'BC که با یکدیگر به

حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند. بنا به قرارداد، این دو مثلث، یک جواب محسوب می‌شوند.

اگر دو دایره مماس باشند، در این صورت مسئله جواب ندارد.

اگر دو دایره متقاطع نباشند، در این صورت مسئله جواب ندارد.

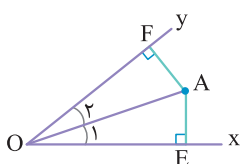
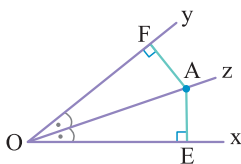
نیمساز یک زاویه

اگر نقطه‌ای روی نیمساز یک زاویه باشد، فاصله نقطه از دو ضلع آن زاویه یکسان است، یعنی در شکل مقابل داریم:

$$AE = AF$$

عکس خاصیت قبل نیز درست است، یعنی اگر نقطه‌ای درون یک زاویه به فاصله یکسان از دو ضلع آن باشد،

آن‌گاه نقطه روی نیمساز آن زاویه قرار دارد. یعنی در شکل زیر با فرض $AE = AF$ ، داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$



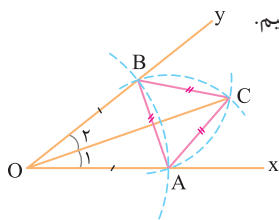
رسم نیمساز یک زاویه

زاویه xOy مفروض است. می‌خواهیم نیمساز آن را رسم کنیم.

نقطه A را روی نیم خط Ox در نظر می‌گیریم، کمانی به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم تا نیم خط Oy را در نقطه B قطع کند، داریم $OA = OB$

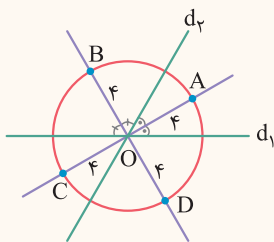
به مرکز A و شعاع AB و بار دیگر به مرکز B و شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم، یک نقطه تلاقی این دو کمان را C می‌نامیم.

OC نیمساز زاویه xOy است، زیرا دو مثلث OAC و OBC به حالت (ض ض ض) هم‌نهشت‌اند، پس $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$



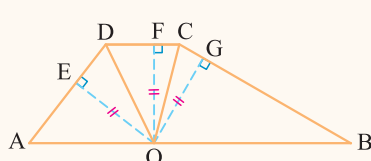
سؤال دو خط متقاطع d_1 و d_2 مفروضند. نقطای را بیابید که از نقطه تقاطع دو خط به فاصله ۴ سانتی‌متر باشد و از هر یک از دو خط d_1 و d_2 به یک فاصله باشد.

پاسخ نقطه‌ای که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله قرار دارد، روی نیمساز زوایای ایجاد شده بین دو خط قرار دارد. از طرفی نقطه‌ای که از نقطه O (محل تلاقی دو خط) به فاصله ۴ سانتی‌متر است، روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ سانتی‌متر قرار دارد، پس محل تلاقی این دایره با نیمسازها جواب است. یعنی نقاط A ، B ، C و D



سؤال اندازه‌های دو ساق یک دوزنقه ۳ و ۵ و اندازه قاعده کوچک آن ۲ است. نقطه‌ای روی قاعده بزرگ آن از دو ساق و قاعده کوچک به یک فاصله است. محیط دوزنقه را به دست آورید.

پاسخ بنا به فرض $OF = OE = OG$ ، لذا نقطه O از دو ضلع زاویه ADC به یک فاصله و در نتیجه O روی نیمساز این زاویه است. هم‌چنین O روی نیمساز زاویه DCB است. در نتیجه:



$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } OD \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{ODC} \\ \widehat{ODC} = \widehat{ODA} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{AOD} \Rightarrow OA = AD$$

با استدلال مشابه داریم $OB = BC$ ، پس $AB = OA + OB = AD + BC$ ، در نتیجه:

$$\text{محیط } ABCD = AB + AD + CD + BC = \underbrace{AD + BC}_{AB} + AD + CD + BC = 2 + 5 + 3 + 2 + 5 = 18$$

عمود منصف یک پاره خط

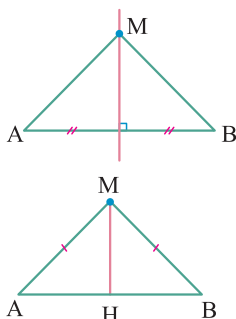
خطی که از نقطه وسط یک پاره خط بر آن عمود می‌شود، عمود منصف آن پاره خط نامیده می‌شود.

اگر نقطه‌ای روی عمود منصف یک پاره خط قرار داشته باشد، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است.

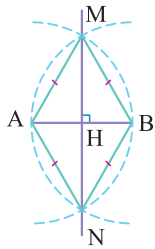
یعنی در شکل مقابل داریم $MA = MB$

اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، روی عمود منصف آن پاره خط قرار دارد.

جهت اثبات آن، کافی است M را به وسط AB وصل کنیم و ثابت کنیم $MH \perp AB$



رسم عمود منصف یک پاره خط



پاره خط AB مفروض است.

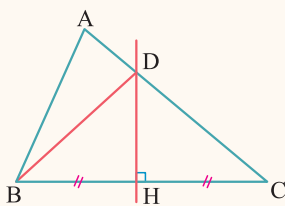
۱) کمانی به مرکز A و شعاع AB رسم می‌کنیم.

۲) کمانی به مرکز B و شعاع AB رسم می‌کنیم.

۳) نقاط تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم.

۴) خط MN عمود منصف پاره خط AB است، زیرا M و N از دو سر پاره خط AB به یک فاصله‌اند.

سؤال در مثلث ABC، عمود منصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند. ثابت کنید اختلاف محیط‌های دو مثلث ABC و ABD برابر طول ضلع BC است.

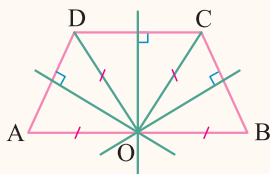


پاسخ مطابق شکل مقابل، عمود منصف ضلع BC، ضلع AC را در نقطه D قطع کرده است، پس $BD = CD$ و در نتیجه $AC = AD + CD = AD + BD$ است و داریم:

$$\Delta \text{ محیط } ABD = AB + \underbrace{BD + AD}_{= AC} = AB + AC$$

$$(\Delta \text{ محیط } ABC) - (\Delta \text{ محیط } ABD) = (AB + AC + BC) - (AB + AC) = BC$$

سؤال در یک دوزنقه، عمود منصف‌های ساق‌ها و قاعده کوچک، روی قاعده بزرگ متقاطع‌اند. ثابت کنید دوزنقه، متساوی الساقین است.



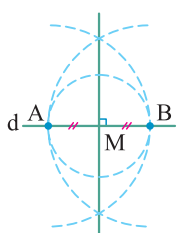
$$OB = OC = OD = OA$$

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel CD, \text{ مورب } OC \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{OCB} \\ AB \parallel CD, \text{ مورب } OD \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{ODC} \\ OC = OD \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ODA} = \widehat{OCB}$$

$$\left. \begin{array}{l} OB = OA \\ \widehat{OCB} = \widehat{ODA} \\ OC = OD \end{array} \right\} \xrightarrow{(\text{ض ز ض})} \Delta OBC \cong \Delta ODA \Rightarrow AD = BC$$

پس دوزنقه ABCD متساوی الساقین است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه روی آن خط



خط d و نقطه M روی آن مفروض است.

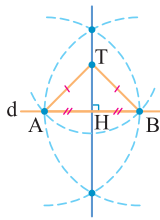
۱) نقطه A متمایز از نقطه M را روی خط d در نظر می‌گیریم.

۲) به مرکز M و شعاع MA، دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی دیگر دایره با خط d را، نقطه B می‌نامیم.

۳) عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم.

۴) این عمود منصف خطی است که از نقطه M می‌گذرد و بر خط d عمود است.

رسم خط عمود بر یک خط داده شده از یک نقطه غیر واقع بر آن خط



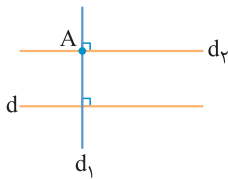
خط d و نقطه T غیر واقع بر آن، مفروض است.

۱ از نقطه A را روی خط d در نظر می‌گیریم، اگر TA بر خط d عمود باشد، خط TA جواب است. در غیر این صورت:

۲ به مرکز T و شعاع TA ، کمانی رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی دیگر آن را با خط d ، B می‌نامیم.

۳ عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم، این عمود منصف، همان خطی است که از نقطه T می‌گذرد (زیرا $TA = TB$) و بر خط d عمود است.

رسم خط موازی با یک خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



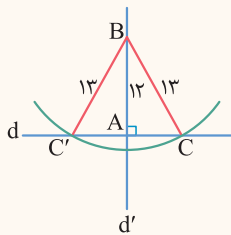
خط d و نقطه A خارج آن داده شده است.

۱ از نقطه A خط d_1 را عمود بر خط d رسم می‌کنیم.

۲ در نقطه A خط d_1 را عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم.

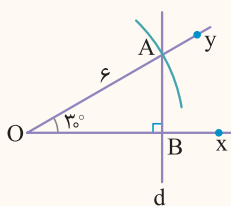
۳ دو خط عمود بر یک خط موازیند، لذا خط d_1 از نقطه A گذشته و موازی خط d است.

سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و یک ضلع آن به ترتیب ۱۳ و ۱۲ باشند.



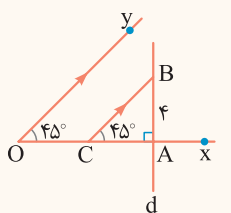
پاسخ خط d را در نظر می‌گیریم. در نقطه A روی آن، خط d' را عمود بر d رسم می‌کنیم و روی آن پاره خط AB را به اندازه ۱۲ جدا می‌کنیم و به مرکز B و شعاع ۱۳ کمانی رسم می‌کنیم و نقاط تلاقی آن با خط d را C و C' می‌نامیم. دو مثلث هم‌نهشت ABC و ABC' جواب هستند.

سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه وتر آن ۶ و اندازه یک زاویه حاده آن 30° باشد.



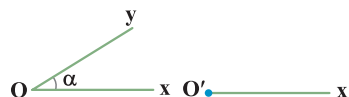
پاسخ ابتدا زاویه xOy را به اندازه 30° رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و شعاع ۶ کمانی رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم خط Oy را A می‌نامیم. از نقطه A خط d را عمود بر نیم خط Ox رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با Ox را B می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویه AOB جواب است.

سؤال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که اندازه یک ضلع آن ۴ و اندازه زاویه روبه‌رو به آن ضلع، 45° درجه باشد.



پاسخ ابتدا زاویه xOy را به اندازه 45° رسم می‌کنیم، سپس نقطه دلخواه A را روی Ox در نظر می‌گیریم و در این نقطه خط d را عمود بر Ox رسم می‌کنیم. حال پاره خط AB را روی خط d به اندازه ۴ جدا می‌کنیم و از نقطه B خطی موازی نیم خط Oy رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با نیم خط Ox یا امتداد آن را C می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویه ABC جواب است.

۱. پاره خط AB به طول ۸ سانتی متر مفروض است. نقاطی را تعیین کنید که از دو نقطه A و B به فاصله ۶ سانتی متر باشند.
۲. توضیح دهید چگونه می‌توان مثلی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۷ سانتی متر رسم کرد.
۳. نقاط A و B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه A برابر و از نقطه B برابر باشد. جاهای خالی را به گونه‌ای کامل کنید که مسأله فوق:
- ا) دو جواب داشته باشد.
- ب) یک جواب داشته باشد.
- پ) جواب نداشته باشد.
۴. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۸ باشد. چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟
۵. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۹ و ۱۲ و زاویه بین آن‌ها 45° باشد، چند متوازی‌الاضلاع با این شرایط می‌توان رسم کرد؟
۶. مستطیلی رسم کنید که طول قطر آن ۸ سانتی متر باشد. چند مستطیل با این شرایط می‌توان رسم کرد؟
۷. یک لوزی رسم کنید که طول قطرهای آن ۶ و ۱۰ باشد.
۸. یک لوزی رسم کنید که طول ضلع آن ۵ و طول یک قطرش ۸ باشد.
۹. دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.
- ا) نقطه‌ای بیابید که فاصله آن از هر ضلع زاویه، ۳ واحد باشد.
- ب) با استفاده از قسمت (ا)، نیمساز زاویه مورد نظر را رسم کنید.
۱۰. دو نقطه A و B داخل زاویه xOy مفروض هستند. نقطه‌ای داخل آن چنان بیابید که از دو ضلع زاویه و از دو نقطه A و B به یک فاصله باشد. چند نقطه با این شرایط می‌توان رسم کرد؟
۱۱. در دایره‌ای به مرکز O و شعاع R وتر AB رسم شده است. ثابت کنید عمود منصف وتر AB از مرکز دایره می‌گذرد.
۱۲. در شکل مقابل قسمتی از یک دایره داده شده است. مرکز این دایره را تعیین کنید.
۱۳. مستطیلی رسم کنید که طول ضلع‌های آن ۳ و ۴ باشد.
۱۴. ثابت کنید هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.
۱۵. ثابت کنید اگر نقطه‌ای داخل یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی نیمساز زاویه قرار دارد.
۱۶. ثابت کنید هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک فاصله است.
۱۷. ثابت کنید اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد، آن‌گاه آن نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.
۱۸. مطابق شکل، زاویه معلوم xOy به اندازه α و نیم خط $O'x'$ داده شده‌اند. زاویه $x'O'y'$ را چنان رسم کنید که اندازه آن برابر α باشد.



۱۹. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاع وارد بر قاعده آن به ترتیب ۳۹ و ۱۲ سانتی متر باشند.
۲۰. مثلی رسم کنید که اندازه دو ضلع آن ۱۷ و ۱۰ و ارتفاع وارد بر ضلع سوم آن ۸ باشد.
۲۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که یک زاویه حاده و مجموع دو ضلع زاویه قائمه آن معلوم باشد.
۲۲. اندازه‌های دو ضلع مثلی و میانه نظیر ضلع سوم آن معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.
۲۳. اندازه دو ضلع مثلی ۶ و ۴ سانتی متر و اندازه زاویه روبه‌رو به ضلع ۴ سانتی متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.
۲۴. اندازه دو ضلع مثلی ۶ و ۴ سانتی متر و اندازه زاویه روبه‌رو به ضلع ۶ سانتی متری، 30° است. مثلث را رسم کنید.

استدلال

صفحه ۱۷ تا ۲۷ کتاب درسی

بسته دوم



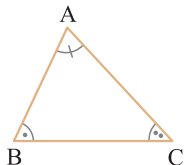
استدلال

استدلال استقرایی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مجموعه محدودی از مشاهدات را استدلال استقرایی می‌گویند.

استدلال استنتاجی: روش نتیجه‌گیری کلی براساس مفاهیمی که درستی آن‌ها را از قبل پذیرفته‌ایم، استدلال استنتاجی نامیده می‌شود.

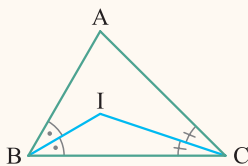
قضیه و عکس قضیه: برخی نتایج مهم و کلی که با استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه نامیده می‌شوند و اگر در یک قضیه جای فرض و حکم را عوض کنیم، آن چه که حاصل می‌شود، عکس قضیه گفته می‌شود. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

قضیه ۱ مجموع اندازه‌های زوایای هر مثلث، برابر 180° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

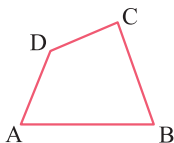
سؤال ثابت کنید در هر مثلث، زاویه حاصل از برخورد دو نیمساز داخلی برابر است با نصف زاویه سوم به علاوه 90°



$$\begin{aligned} \triangle ABC: \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= 180^\circ \\ \triangle BIC: \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} + \hat{I} &= 180^\circ \\ \Rightarrow \hat{I} &= 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} \end{aligned} \Rightarrow \hat{I} = 180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$$

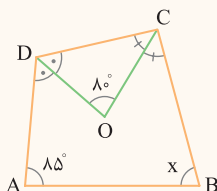
پاسخ

قضیه ۲ مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب، برابر 360° است.



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

سؤال نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور یک چهارضلعی محدب، یکدیگر را با زاویه 80° قطع می‌کنند. اگر اندازه دو زاویه دیگر 85° و x باشد، مقدار x را بیابید.



$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} &= 360^\circ \\ \frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \hat{C} + \hat{D} &= 360^\circ - 80^\circ = 280^\circ \\ \hat{C} + \hat{D} &= 280^\circ - 85^\circ - x = 195^\circ - x \end{aligned}$$

پاسخ

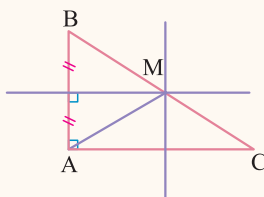
قضیه ۳ سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث هم‌رسانند.

قضیه ۴ سه ارتفاع هر مثلث هم‌رسانند.

قضیه ۵ سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث هم‌رسانند.

سؤال ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه، عمودمنصف اضلاع در وسط وتر هم‌رسانند.

پاسخ مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) مفروض است. عمودمنصف ضلع AB را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن را با وتر BC ، M می‌نامیم. داریم $MA = MB$ و می‌توان نوشت:



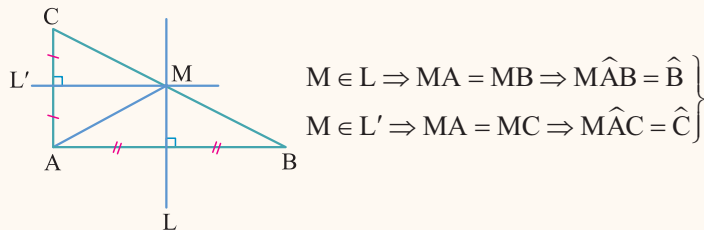
$$\begin{aligned} MA = MB &\Rightarrow \hat{BAM} = \hat{ABM} \\ \hat{MAC} &= 90^\circ - \hat{BAM} \\ \hat{MCA} &= 90^\circ - \hat{ABM} \end{aligned} \Rightarrow \hat{MAC} = \hat{MCA} \Rightarrow MA = MC$$

تساوی اخیر یعنی M روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و هم‌چنین از $MA = MB$ و $MA = MC$ نتیجه می‌شود $BM = MC$. بنابراین M نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قائم‌الزاویه ABC در وسط وتر است.

سؤال ثابت کنید اگر در مثلثی نقطه هم‌رسمی عمود منصف‌ها روی ضلع مثلث قرار گیرد، آن‌گاه مثلث قائم‌الزاویه است.

پاسخ مطابق شکل در مثلث ABC فرض کنیم عمود منصف اضلاع AB، AC و BC در نقطه M روی ضلع BC هم‌رسند. از M به A وصل می‌کنیم،

داریم:

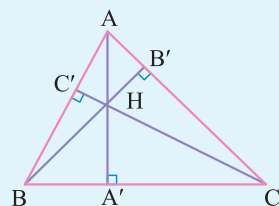


$$\left. \begin{array}{l} M \in L \Rightarrow MA = MB \Rightarrow \widehat{MAB} = \widehat{B} \\ M \in L' \Rightarrow MA = MC \Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{C} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{+} \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C} \xrightarrow{+ \widehat{A} \text{ طرفین}} 2\widehat{A} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} \Rightarrow 2\widehat{A} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 90^\circ$$

و این یعنی مثلث ABC، در رأس A قائم‌الزاویه است.

سؤال در شکل مقابل، سه ارتفاع مثلث رسم شده‌اند. ثابت کنید $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{A}$



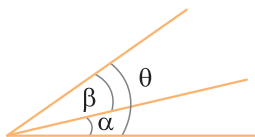
پاسخ در چهارضلعی AB'HC' مجموع زوایای برابر 360° است، پس می‌توان نوشت:

$$\widehat{A} + 90^\circ + 90^\circ + \widehat{B'HC'} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{B'HC'} = 180^\circ - \widehat{A}$$

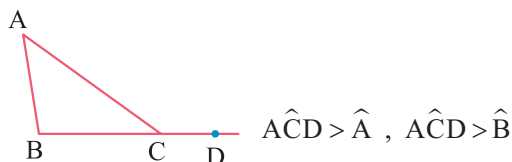
اما دو زاویه $\widehat{BHC}$ و $\widehat{B'HC'}$ متقابل به رأس و در نتیجه هم‌اندازه هستند، لذا $\widehat{BHC} = \widehat{B'HC'} = 180^\circ - \widehat{A}$

نامساوی‌ها در مثلث

۱ در شکل مقابل همواره داریم: $\theta > \alpha$ و $\theta > \beta$

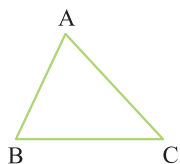


۲ هر زاویه خارجی در مثلث از زوایای داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.



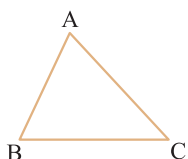
$$\widehat{ACD} > \widehat{A}, \widehat{ACD} > \widehat{B}$$

قضیه اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، از زاویه روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



$$AB < AC \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$$

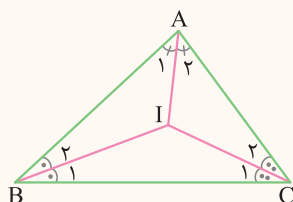
عکس قضیه فوق: اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.



$$\widehat{C} < \widehat{B} \Rightarrow AB < AC$$

سؤال در مثلث ABC اگر I نقطه هم‌رسی نیم‌سازها و $BC > AB > AC$ باشد، آن‌گاه ثابت کنید $BI > CI > AI$

پاسخ



فرض: $BC > AB > AC$

حکم: $BI > CI > AI$

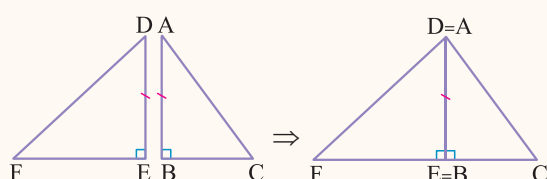
$$BC > AB \Rightarrow \hat{A} > \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A}}{2} > \frac{\hat{C}}{2} \Rightarrow \hat{A}_2 > \hat{C}_2 \xrightarrow{\text{در مثلث AIC}} CI > AI \quad (1)$$

$$AB > AC \Rightarrow \hat{C} > \hat{B} \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2} > \frac{\hat{B}}{2} \Rightarrow \hat{C}_1 > \hat{B}_1 \xrightarrow{\text{در مثلث BIC}} BI > CI \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow BI > CI > AI$$

سؤال در دو مثلث قائم‌الزاویه ABC و DEF داریم: $\hat{C} > \hat{F}$ و $AB = DE$ ، $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$. ثابت کنید $DF > AC$

پاسخ



دو مثلث را در ضلعی که اندازه‌شان برابر است، مطابق شکل رسم می‌کنیم. چون در مثلث ACF، $\hat{C} > \hat{F}$ ، پس بنا به قضیه زاویه بزرگ‌تر، نتیجه می‌شود $DF > AC$

گزاره

تعریف گزاره جمله‌ای است خبری، درست یا نادرست، اگرچه درست یا نادرست بودن آن بر ما معلوم نباشد.

گزاره‌ای که تنها یک خبر را اعلام کند گزاره ساده گفته می‌شود و اگر بیش از یک خبر را اعلام کند به آن گزاره مرکب گفته می‌شود. مثلاً هر یک از جمله‌های زیر گزاره است:

- فردا هوا بارانی است. (گزاره ساده)
- یازده، عددی اول است. (گزاره ساده)
- فردا هوا برفی است و ۳ عددی زوج است. (گزاره مرکب)
- $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. (گزاره ساده)

نقیض یک گزاره:

اگر P یک گزاره باشد، گزاره «چنین نیست که P» را نقیض P می‌گوییم، مثلاً:

گزاره	نقیض گزاره
a از b بزرگ‌تر است.	چنین نیست که a از b بزرگ‌تر باشد، یعنی a از b بزرگ‌تر نیست و معادل آن این است که $a = b$ یا $a < b$ است.
مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.	چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است و معادل آن «مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نیست.» می‌باشد.

نکته

نقیض «هر» می‌شود «وجود دارد» و جمله منفی می‌شود «وجود دارد» می‌شود «هر» و جمله منفی می‌شود.

- گزاره‌هایی که با «هیچ» شروع می‌شوند به نوعی با «هر» ارتباط دارند. مثلاً «هیچ مثلثی دو زاویه قائمه ندارد.» معادل این است که بگوییم «هر مثلث دو زاویه قائمه ندارد.»

مثال

نقیض عبارت «مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست.» را بنویسید.

پاسخ

«چنین نیست که مربعی وجود دارد که متوازی‌الاضلاع نیست» و معادل آن این است که «هر مربعی، متوازی‌الاضلاع است.»

گزاره شرطی:

هر گزاره به صورت «اگر، آن‌گاه» گزاره شرطی نامیده می‌شود. مثلاً گزاره «اگر دو ضلع مثلثی برابر باشند، آن‌گاه زوایای مقابل آن‌ها برابر است.» یک گزاره شرطی می‌باشد.

برهان غیرمستقیم (برهان خلف)

ا فرض می‌کنیم نقیض حکم درست باشد. (فرض خلف)

ب به کمک روش‌های درست ریاضی، گزاره‌ای را نتیجه می‌گیریم که با مفروضات مسئله یا یک قضیه یا یک گزاره درست در تناقض باشد.

پ با توجه به قسمت (ب) نتیجه می‌گیریم نقیض حکم نادرست است، در نتیجه حکم درست است.

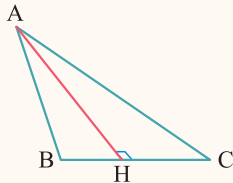
سؤال ثابت کنید در هر مثلث منفرجه‌الزاویه، دو ارتفاع خارج مثلث قرار می‌گیرد.

پاسخ فرض کنیم در مثلث ABC زاویه B منفرجه باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم ارتفاع AH خارج مثلث ABC قرار می‌گیرد.

برهان خلف: فرض کنیم AH داخل مثلث یا روی آن قرار گیرد (فرض خلف).

ا اگر AH داخل مثلث قرار گیرد (شکل مقابل) بنابه زاویه خارجی در مثلث ABH نتیجه می‌شود $\hat{B} < \hat{AHC}$ یا

$90^\circ < \hat{B}$ و این یعنی زاویه B حاده است که با فرض منفرجه بودن آن تناقض دارد.



ب اگر AH بر AB منطبق باشد، مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌شود که این با منفرجه‌الزاویه بودن آن تناقض دارد. پس فرض خلف غلط و حکم مسئله درست است.

با همین استدلال نتیجه می‌شود ارتفاع رسم شده از رأس C نیز خارج مثلث قرار می‌گیرد.

قضیه دو شرطی

اگر عکس یک قضیه درست باشد، آن قضیه را دو شرطی می‌نامند. قضیه‌های دو شرطی به صورت (..... اگر و تنها اگر) نوشته می‌شوند و نماد $\Leftrightarrow$ برای

آن‌ها به کار می‌رود. مثلاً قضیه فیثاغورس دو شرطی است و به صورت زیر نوشته می‌شود:

«مثلثی قائم‌الزاویه است؛ اگر و تنها اگر مربع یک ضلع آن برابر مجموع مربعات دو ضلع دیگرش باشد.»

مثال نقض

به مثالی که نشان دهد یک حکم کلی یا یک حدس کلی نادرست است، مثال نقض گفته می‌شود. مثلاً حکم کلی «هر چهارضلعی که چهار ضلع برابر داشته باشد، مربع است.» با مثال لوزی، نقض می‌شود.

اگر درستی یک حکم کلی را نتوانیم اثبات کنیم و برای رد آن مثال نقض نیز نتوانیم بیان کنیم، نمی‌توانیم درباره درستی آن حکم کلی، نتیجه‌ای بگیریم. مثلاً در ریاضیات، حکم «هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت.» معروف به حدس گلدباخ می‌باشد و هنوز درستی آن اثبات و مثال نقضی نیز برای آن پیدا نشده است.

استدلال

پرسش‌های تشریحی

بسته
۲

۲۵. اگر با مشاهده تعدادی مثلث که میانه و ارتفاع آن‌ها بر هم منطبق است، نتیجه‌گیری کنیم چنین مثلث‌هایی متساوی‌الساقین می‌باشد، چه استدلالی انجام داده‌ایم؟

۲۶. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

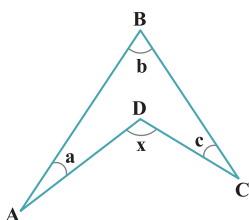
۲۷. ثابت کنید مجموع اندازه‌های زوایای داخلی هر چهارضلعی محدب 360° است.

۲۸. ثابت کنید در هر مثلث، اندازه هر زاویه خارجی برابر مجموع اندازه‌های دو زاویه داخلی غیر مجاورش می‌باشد.

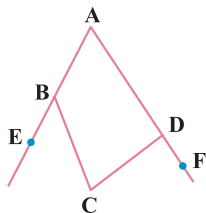
۲۹. ثابت کنید هر زاویه خارجی مثلث از زاویه‌های داخلی غیر مجاورش بزرگ‌تر است.

۳۰. ثابت کنید مجموع زوایای خارجی هر مثلث برابر 360° است.

۳۱. در چهارضلعی مقعروبه‌رو، ثابت کنید: $x = a + b + c$



۳۲. در چهارضلعی محدب مقابل، ثابت کنید: $\widehat{EBC} + \widehat{FDC} = \widehat{A} + \widehat{C}$



۳۳. ثابت کنید اگر در مثلثی نیمساز یکی از زوایا بر ضلع مقابل آن زاویه عمود باشد، مثلث متساوی الساقین است.

۳۴. ثابت کنید اگر در مثلثی ارتفاع نظیر یکی از اضلاع، میانه آن باشد، مثلث متساوی الساقین است.

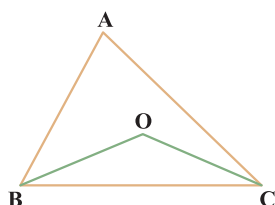
۳۵. ثابت کنید اگر در مثلثی نیمساز یکی از زوایا میانه نظیر ضلع روبه روی آن زاویه باشد، مثلث متساوی الساقین است.

۳۶. ثابت کنید سه عمود منصف اضلاع هر مثلث هم‌رسند.

۳۷. ثابت کنید سه ارتفاع هر مثلث هم‌رسند.

۳۸. ثابت کنید سه نیمساز زوایای داخلی هر مثلث هم‌رسند.

۳۹. در شکل مقابل، O نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث است. ثابت کنید $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$



۴۰. ثابت کنید اگر I' نقطه برخورد دو نیمساز زوایای خارجی B و C در مثلث ABC باشد، آنگاه $\widehat{B'IC} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}$

۴۱. از نقطه هم‌رسی نیمسازهای مثلث ABC بر اضلاع آن عمود می‌کنیم. ثابت کنید این نقطه، نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های اضلاع مثلثی است که پای عمودها را به هم وصل می‌کند.

۴۲. ثابت کنید در هر مثلث، نیمسازهای دو زاویه خارجی و نیمساز زاویه داخلی سوم هم‌رسند.

۴۳. مثلث ABC حاده الزوایا است. عمود منصف اضلاع AB و AC خط شامل ضلع BC را به ترتیب در نقاط E و F قطع می‌کنند. ثابت کنید نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های مثلث ABC بر نقطه هم‌رسی نیمسازهای زوایای مثلث AEF منطبق است.

۴۴. ثابت کنید اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویه روبه رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر از زاویه روبه رو به ضلع کوچک‌تر است.

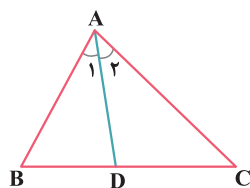
۴۵. ثابت کنید اگر در مثلثی دو زاویه نابرابر باشند، ضلع روبه رو به زاویه بزرگ‌تر از ضلع روبه رو به زاویه کوچک‌تر، بزرگ‌تر است.

۴۶. ثابت کنید هر ضلع مثلث، از تفاضل دو ضلع دیگر بزرگ‌تر است.

۴۷. (قضیه نامساوی مثلث): در مثلث ABC، AD نیمساز زاویه A می‌باشد.

الف) ثابت کنید $AB > BD$

ب) ثابت کنید $AC > CD$



پ) ثابت کنید در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه ضلع سوم آن بزرگ‌تر است ($AB + AC > BC$).

۴۸. در مثلث ABC، AD' نیمساز زاویه خارجی A است. ثابت کنید: $D'B > AB$ و $D'C > AC$

۴۹. ثابت کنید در هر مثلث مختلف الاضلاع با زوایای حاده، نقطه هم‌رسی ارتفاع‌ها، از رأس روبه رو به کوچک‌ترین ضلع، بزرگ‌ترین فاصله را دارد.

۵۰. کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ‌ترین زاویه، از سه برابر اندازه کوچک‌ترین زاویه کوچک‌تر است.

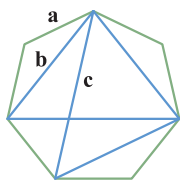
ب) مجموع دو زاویه حاده کم‌تر از 180° است.

پ) ارتفاع یک مثلث همواره داخل آن قرار می‌گیرد.

ت) نقطه هم‌رسی عمود منصف‌های سه ضلع یک مثلث همواره داخل مثلث قرار می‌گیرد.

ث) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث، کوچک‌تر است.

ج) میانه هر مثلث از اضلاع آن بزرگ‌تر است.



۵۱. در شکل زیر، نقطه‌ها، رأس‌های یک هفت‌ضلعی منتظم به طول ضلع a می‌باشند. فاصله هر رأس از رأس بعدی

برابر a و از دومین رأس بعد از آن برابر b و از سومین رأس بعد از آن برابر c است. آیا حکم کلی «با وصل کردن هر سه

رأس از این شکل، یک مثلث متساوی‌الساقین به دست می‌آید.» درست است؟

۵۲. آیا حکم‌های کلی زیر درست هستند؟ چرا؟

ا) برای هر دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$

ب) هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت‌اند.

۵۳. تعیین کنید کدام یک از حکم‌های کلی زیر درست و کدام یک نادرست هستند؟ برای آن‌ها که نادرست هستند یک مثال نقض بیاورید.

ا) همه اعداد صحیح، منفی‌اند.

ب) هر چهارضلعی که چهار زاویه برابر داشته باشد، مربع است.

پ) مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر پنج‌ضلعی محدب 540° است.

ت) به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ ، مقداری عددی اول است.

۵۴. نقیض هر یک از گزاره‌های زیر را بنویسید.

ا) هر لوزی یک متوازی‌الاضلاع است.

ب) مستطیلی وجود دارد که مربع نیست.

پ) هیچ مثلثی، بیش از یک زاویه قائمه ندارد.

ت) مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی محدب برابر 360° است.

ث) هر زاویه خارجی یک چندضلعی محدب از هر زاویه داخلی آن بزرگ‌تر است.

۵۵. عکس هر یک از قضایای زیر را نوشته و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دو شرطی بنویسید.

ا) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهارضلعی لوزی باشد، آن‌گاه قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آن‌گاه سه زاویه نیز با هم برابرند.

ت) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آن‌گاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

ث) اگر در مثلثی دو ضلع برابر باشند، آن‌گاه میانه نظیر آن‌ها نیز برابرند.

ج) در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع‌های وارد بر ساق‌ها برابرند.

چ) در متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند.

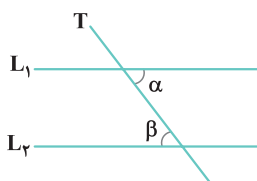
۵۶. به کمک برهان خلف ثابت کنید از یک نقطه خارج یک خط، فقط یک عمود بر آن می‌توان رسم کرد.

۵۷. می‌دانیم که از یک نقطه خارج از یک خط فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید خطی که یکی از دو خط موازی

را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۵۸. با برهان خلف ثابت کنید در مثلث ABC ، اگر $AB \neq AC$ باشد، آن‌گاه: $\hat{B} \neq \hat{C}$

۵۹. در شکل زیر با برهان خلف ثابت کنید، اگر $\alpha = \beta$ باشد، آن‌گاه: $L_1 \parallel L_2$



۲

بخش

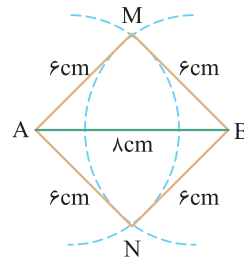


پاسخ نامه

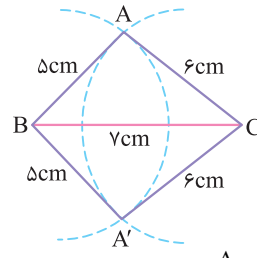
ترسیم‌های هندسی و استدلال

فصل ۱

۱ | ابتدا پاره خط AB را به طول ۸ سانتی متر رسم می‌کنیم، سپس به مرکز A و شعاع ۶ سانتی متر و به مرکز B و شعاع ۶ سانتی متر دو کمان رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دو کمان را M و N می‌نامیم. N و M نقاطی هستند که از دو سر پاره خط AB به فاصله ۶ سانتی متر هستند.

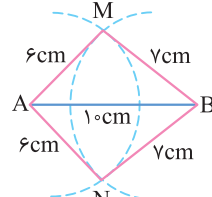


۲ | ابتدا یکی از پاره خط‌های به طول ۵ یا ۶ یا ۷ را رسم می‌کنیم، مثلاً پاره خط بزرگ‌تر $BC = 7$. سپس دو دایره به مراکز B و C و شعاع‌های ۵ و ۶ رسم می‌کنیم، محل تلاقی آن‌ها، جای رأس سوم مثلث یعنی نقطه A است.

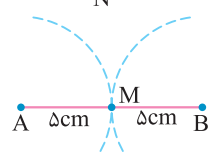


مسئله دارای دو جواب هم‌نهشت $\triangle ABC$ و $\triangle A'BC$ است که یک جواب محسوب می‌شود.

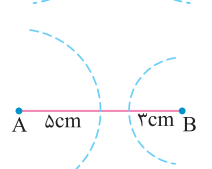
۳ | نقاط A و B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم هستند، در این صورت دو نقطه وجود دارد که از نقطه A به فاصله ۶ سانتی متر و از نقطه B به فاصله ۷ سانتی متر باشد.



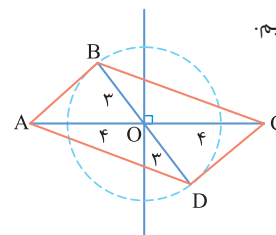
نقاط A و B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم هستند، در این صورت یک نقطه وجود دارد که از نقطه‌های A و B به فاصله ۵ سانتی متر باشد.



نقاط A و B به فاصله ۱۰ سانتی متر از هم هستند، در این صورت نقطه‌ای وجود ندارد که از نقطه A به فاصله ۵ cm و از نقطه B به فاصله ۳ cm باشد.



۴ | پاره خط $AC = 8$ را رسم می‌کنیم.



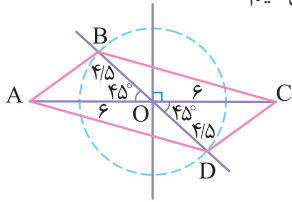
عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = 4$ به مرکز O و شعاع ۳، دایره‌ای رسم می‌کنیم.

یک قطر دلخواه از این دایره مانند BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

چهارضلعی $ABCD$ ، متوازی‌الاضلاع مطلوب است، زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند.

مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا بی‌شمار قطر مانند BD می‌توان رسم کرد.

۵ | پاره خط $AC = 12$ را رسم می‌کنیم.

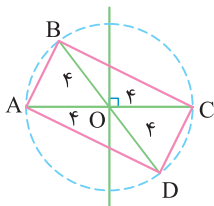


عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = 6$ به مرکز O و شعاع $4/5$ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

نیمساز زاویه قائمه به رأس O را مطابق شکل رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی آن با دایره، B و D می‌باشد.

چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است. زیرا قطرهای آن یک‌دیگر را نصف کرده‌اند و زاویه بین آن‌ها 45° است، پس مسئله دقیقاً یک جواب دارد.

۶ | پاره خط $AC = 8$ را رسم می‌کنیم.



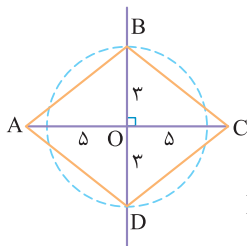
عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = 4$

به مرکز O و شعاع ۴، دایره‌ای رسم می‌کنیم.

قطر دلخواه BD که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.

چهارضلعی $ABCD$ مستطیل است زیرا قطرهای آن برابرند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند و مسئله بی‌شمار جواب دارد.

۷ | پاره خط $AC = 10$ را رسم می‌کنیم.

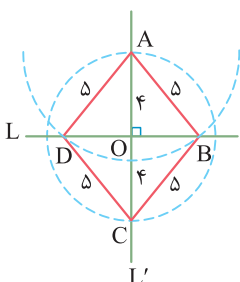


عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم، داریم $OA = OC = 5$

به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، نقطه‌های تلاقی آن با عمود منصف را B و D می‌نامیم.

چهارضلعی $ABCD$ لوزی است، زیرا قطرهای آن بر هم عمودند و یک‌دیگر را نصف می‌کنند.

۸ | دو خط عمود بر هم به نام‌های L و L' را رسم می‌کنیم.

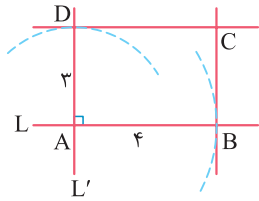


به مرکز O و شعاع ۴ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L' را A و C می‌نامیم.

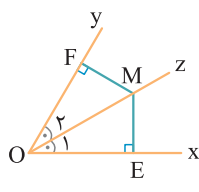
به مرکز A و شعاع ۵، کمانی رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با خط L را نقاط B و D می‌نامیم. مثلث‌های قائم‌الزاویه AOB و AOD به حالت برابری وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند پس $OB = OD$

چهارضلعی $ABCD$ لوزی به ضلع ۵ و قطر ۸ می‌باشد، زیرا قطرهای آن عمود منصف یک‌دیگرند.

۱۳ | دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن‌ها را A می‌نامیم. به مرکز A و شعاع ۴ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطه B قطع کند. همچنین به مرکز A و شعاع ۳ کمانی رسم می‌کنیم تا خط L' را در نقطه D قطع کند.



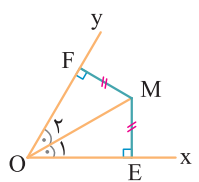
در نقطه B خطی عمود بر L و در نقطه D خطی عمود بر L' رسم می‌کنیم، نقطه تلاقی این دو خط را C می‌نامیم. $ABCD$ مستطیل مطلوب است.



۱۴ | فرض: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ ، حکم: $ME = MF$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OM = OM \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک زاویه حاده}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow ME = MF$$



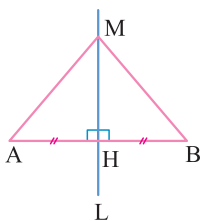
۱۵ | فرض: $ME = MF$ ، حکم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ ME = MF \\ \hat{E} = \hat{F} = 90^\circ \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle OME \cong \triangle OMF \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی نقطه M روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد.

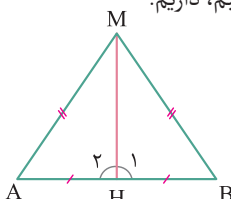
۱۶ | فرض: خط L عمودمنصف AB است. حکم: $MA = MB$



$$\left. \begin{array}{l} AH = BH \\ \hat{A}HM = \hat{B}HM = 90^\circ \\ MH = MH \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ز ض)}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \Rightarrow MA = MB$$

۱۷ | فرض: $MA = MB$ ، حکم: M روی عمودمنصف AB قرار دارد. نقطه M را به وسط پاره خط AB وصل می‌کنیم، داریم:

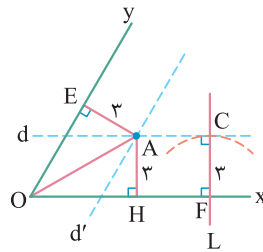


$$\left. \begin{array}{l} AM = MB \\ MH = MH \\ AH = BH \end{array} \right\}$$

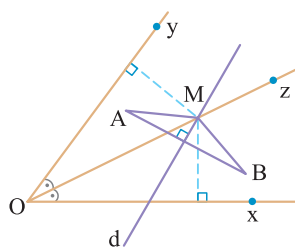
$$\xrightarrow{\text{(ض ض ض)}} \triangle AMH \cong \triangle BMH \Rightarrow \hat{H}_1 = \hat{H}_2$$

از طرفی $\hat{H}_1 + \hat{H}_2 = 180^\circ$ ، پس $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$ ، یعنی MH عمودمنصف پاره خط AB است، پس M روی عمودمنصف پاره خط AB قرار دارد.

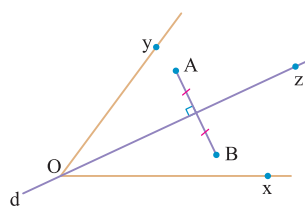
۹ | خط دلخواه L را در F عمود بر Ox رسم می‌کنیم، کمانی به مرکز F و شعاع ۳ رسم می‌کنیم تا خط L را در نقطه C قطع کند. در نقطه C خط d را عمود بر L رسم می‌کنیم. همه نقاط خط d از نیم خط Ox به فاصله ۳ می‌باشند.



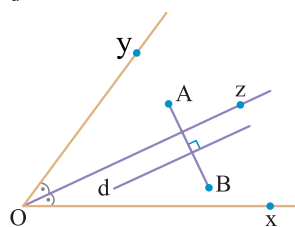
به طریق مشابه خط d' موازی Oy و به فاصله ۳ از آن رسم می‌شود، محل تلاقی d و d' نقطه A است که از دو نیم خط Ox و Oy به فاصله ۳ است. چون نقطه A از ضلع‌های زاویه xOy به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویه xOy قرار دارد، از طرفی O نقطه‌ای از نیمساز زاویه xOy است. در نتیجه نیم خط شامل پاره خط OA نیمساز زاویه xOy است.



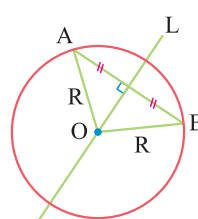
۱۰ | نیمساز زاویه xOy و سپس خط d عمودمنصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم و نقطه تلاقی آن با Oz را M می‌نامیم. نقطه M از دو ضلع زاویه xOy و از دو سر پاره خط AB به یک فاصله است.



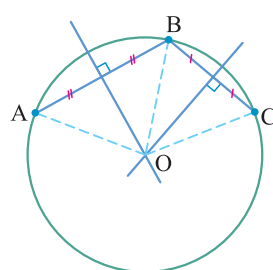
اگر نیمساز Oz بر خط d منطبق شود، در این صورت مسئله بی‌شمار جواب دارد و این اتفاق، وقتی می‌افتد که A و B دو طرف Oz قرار گرفته و از آن به یک فاصله باشند. اما اگر نیمساز Oz و خط d موازی باشند، مسئله جواب ندارد.



۱۱ | فرض کنید خط L عمودمنصف وتر



در دایره به مرکز O و شعاع R باشد، چون $OA = OB = R$ است، پس نقطه O روی عمودمنصف پاره خط AB یعنی خط L قرار دارد.



۱۲ | نقاط A ، B و C را مطابق شکل روی کمان داده شده در نظر می‌گیریم. عمودمنصف پاره خط‌های AB و AC را رسم می‌کنیم.

چون هر دوی این عمودمنصف‌ها از مرکز دایره می‌گذرند، پس نقطه تلاقی آن‌ها یعنی نقطه O مرکز دایره‌ای است که این کمان بخشی از آن است.

چهارضلعی $ABA'C$ متوازی الاضلاع است؛ زیرا قطرهایش یک دیگر را نصف می کنند، پس $A'C = AB = c$

مثلث $AA'C$ سه ضلع اش معلوم است ($A'C = c$)، $AA' = 2m_a$ و $AC = b$ ، آن را رسم می کنیم. CM را از سمت M به اندازه خودش امتداد می دهیم، تا نقطه B به دست آید. A را به B وصل می کنیم. مثلث مطلوب است.

۲۳ | ابتدا زاویه xBy را به اندازه 30° رسم می کنیم.

به مرکز B و شعاع 6 کمانی رسم می کنیم تا نیم خط Ox را در نقطه C قطع کند. به مرکز C و شعاع 4 سانتی متر کمانی رسم می کنیم. نقاطی تلاقی آن با نیم خط By را A' و A می نامیم. مثلث های غیرهم نهشت ABC و $A'BC$ جواب هستند.

۲۴ | ابتدا زاویه xBy را به اندازه 30° رسم می کنیم.

به مرکز B و شعاع 4 سانتی متر کمانی رسم می کنیم تا نیم خط Bx را در C قطع کند. به مرکز C و شعاع 6 سانتی متر، کمانی رسم می کنیم. این کمان، نیم خط By را دقیقاً در یک نقطه مثلاً به نام A قطع می کند. مثلث ABC جواب است.

۲۵ | استدلال استقرایی

۲۶ | $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ حکم، مثلث ABC : فرض

از رأس A خط L را موازی BC رسم می کنیم، داریم:

$$\left. \begin{array}{l} L \parallel BC, \text{ مورب } AB \Rightarrow \hat{DAB} = \hat{B} \\ L \parallel BC, \text{ مورب } AC \Rightarrow \hat{EAC} = \hat{C} \end{array} \right\}$$

از طرفی داریم $\hat{DAB} + \hat{A} + \hat{EAC} = 180^\circ$ و با قرار دادن تساوی های $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ فوق در آن نتیجه می شود:

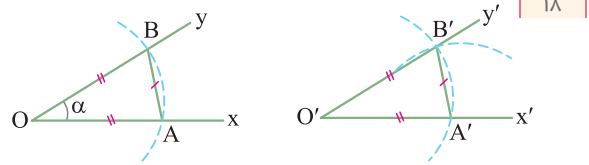
۲۷ | فرض: $ABCD$ چهارضلعی محدب

حکم: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$

قطر AC یا BD را رسم می کنیم، داریم:

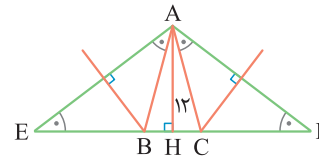
$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABD: \hat{A} + \hat{D}_1 + \hat{B}_1 = 180^\circ \\ \triangle BCD: \hat{C} + \hat{D}_2 + \hat{B}_2 = 180^\circ \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{+} \hat{A} + \hat{C} + (\hat{D}_1 + \hat{D}_2) + (\hat{B}_1 + \hat{B}_2) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{B} = 360^\circ$$


نقطه A را غیر از O روی نیم خط Ox در نظر می گیریم. کمانی به مرکز O و شعاع OA ، نیم خط Oy را در نقطه ای مانند B قطع می کند، داریم $OA = OB$. به مرکز O' و شعاع OA کمانی رسم می کنیم، نقطه تلاقی آن را با نیم خط $O'x'$ ، نقطه A' می نامیم. به مرکز A' و شعاع AB کمانی رسم می کنیم، یک نقطه تلاقی آن را با کمان قبل نقطه B' می نامیم. O' را به B' وصل کرده و امتداد می دهیم. اندازه زاویه $x'O'y'$ برابر α است زیرا دو مثلث OAB و $O'A'B'$ به حالت (ض ض ض) هم نهشت هستند.

۱۹ | پاره خط EF را به طول 39 سانتی متر رسم می کنیم. عمود منصف این پاره خط را رسم می کنیم و روی آن پاره خط AH را به طول 12 سانتی متر جدا می کنیم. مثلث AEF متساوی الساقین است. عمود منصف ساق های AE و AF را رسم می کنیم. نقطه تلاقی آن ها را با EF به ترتیب B و C می نامیم. دو مثلث متساوی الساقین ABE و ACF به حالت (ض ض ز) هم نهشت اند. پس $BE = AB = AC = CF$. در نتیجه محیط مثلث متساوی الساقین ABC برابر 39 است و ارتفاع وارد بر قاعده آن $AH = 12$ است.



۲۰ | دو خط عمود بر هم L و L' را رسم می کنیم. AH را روی L' برابر 8 جدا می کنیم. به مرکز A و شعاع 10 و به مرکز A و شعاع 17 ، دو کمان رسم می کنیم. نقاط تلاقی آن ها با خط L را B ، B' ، C و C' می نامیم.

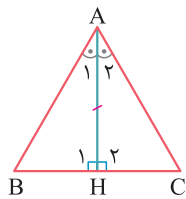
مثلث های ABC ، $AB'C'$ ، $AB'C$ و ABC' جواب اند و مسئله دارای دو جواب متمایز ABC و $AB'C$ است. زیرا $\triangle ABC \cong \triangle AB'C$ و $\triangle ABC' \cong \triangle AB'C'$

۲۱ | بنا به فرض $\hat{B} = \alpha$ و $AB + AC = k$ معلوم هستند. ابتدا پاره خط $BD = k$ را رسم می کنیم. زوایایی به اندازه 45° و α را به ترتیب در رأس های D و B می سازیم. محل برخورد اضلاع دیگرشان را C می نامیم. از C بر BD عمود می کنیم. پای عمود را A می نامیم. مثلث قائم الزاویه ABC جواب است.

زیرا $AB + AC = AB + AD = BD = k$ و $\hat{B} = \alpha$



۲۲ | بنا به فرض $AB = c$ ، $AC = b$ و $AM = m_a$ معلوم هستند، میانه AM را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا نقطه A' به دست آید.



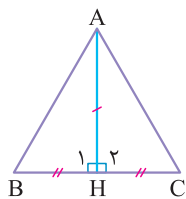
۳۳ | فرض: $AH \perp BC$ و $\hat{A}$ نیمساز AH

حکم: $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.

$$(\hat{A}_1 = \hat{A}_2, AH = AH, \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ)$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ز)}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow AB = AC$$

پس مثلث ABC متساوی الساقین است.



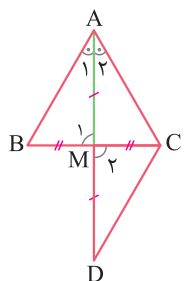
۳۴ | فرض: $AH \perp BC$ و $BH = CH$

حکم: $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.

$$(AH = AH, \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ, BH = CH)$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ض)}} \triangle ABH \cong \triangle ACH \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

پس مثلث ABC متساوی الساقین است.



۳۵ | فرض: AM نیمساز $\hat{A}$ و $BM = CM$

حکم: $\triangle ABC$ متساوی الساقین است.

میانۀ AM را به اندازه خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم، داریم:

$$(BM = CM, \hat{M}_1 = \hat{M}_2, AM = DM)$$

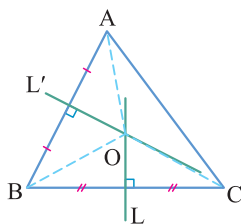
$$\xrightarrow{\text{(ض ض)}} \triangle ABM \cong \triangle DCM \Rightarrow \begin{cases} AB = CD \\ \hat{D} = \hat{A}_1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\hat{D} = \hat{A}_1 \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{A}_2} \hat{D} = \hat{A}_2 \Rightarrow AC = CD \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow AB = AC \Rightarrow \triangle ABC \text{ متساوی الساقین است}$$

۳۶ | فرض: $\triangle ABC$ مثلث دلخواه

حکم: عمودمنصف اضلاع AB ، AC و BC هم‌رسند.



نقطه تلاقی عمودمنصف اضلاع BC و AB

AB (خط‌های L و L') را O می‌نامیم

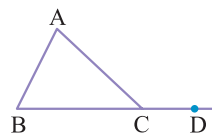
و O را به رأس‌های مثلث وصل می‌کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} O \in L \Rightarrow OB = OC \\ O \in L' \Rightarrow OB = OA \end{array} \right\} \Rightarrow OA = OC$$

و این یعنی نقطه O از دو سرپاره خط AC به یک فاصله است، پس O روی عمودمنصف ضلع AC قرار دارد و این یعنی سه عمودمنصف اضلاع مثلث ABC در نقطه O هم‌رسند.

۳۷ | فرض: $\triangle ABC$ مثلث دلخواه

حکم: ارتفاع‌های وارد بر اضلاع AC ، AB و BC هم‌رسند.

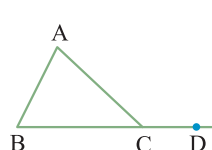


۳۸ | فرض: $\triangle ABC$ زاویه خارجی $\hat{ACD}$

$$\text{حکم: } \hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \\ \hat{C} + \hat{ACD} = 180^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{C} + \hat{ACD}$$

$$\Rightarrow \hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B}$$



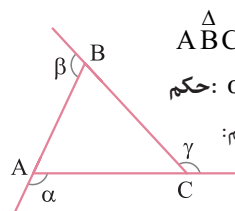
۳۹ | فرض: $\triangle ABC$ زاویه خارجی $\hat{ACD}$

$$\text{حکم: } \hat{ACD} > \hat{B}, \hat{ACD} > \hat{A}$$

می‌دانیم اندازه هر زاویه خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های زوایای داخلی غیرمجاور

مثلث است. لذا:

$$\hat{ACD} = \hat{A} + \hat{B} \Rightarrow \hat{ACD} > \hat{A}, \hat{ACD} > \hat{B}$$

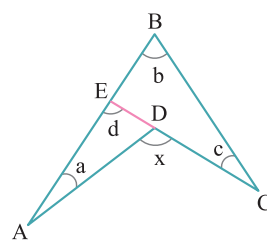


۴۰ | فرض: $\triangle ABC$ زاویه‌های خارجی α و β و γ

$$\text{حکم: } \alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$$

بنابه ویژگی زاویه خارجی در مثلث ABC داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \hat{B} + \hat{C} \\ \beta = \hat{A} + \hat{C} \\ \gamma = \hat{A} + \hat{B} \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \alpha + \beta + \gamma = 2(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) = 2 \times 180^\circ = 360^\circ$$



۴۱ | فرض: $ABCD$ چهارضلعی مقعر

$$\text{حکم: } x = a + b + c$$

مطابق شکل، امتداد ضلع CD ، ضلع AB

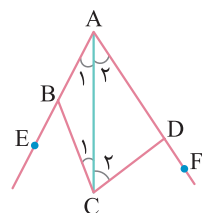
را در E قطع می‌کند. بنابه ویژگی زاویه

خارجی در مثلث‌های $\triangle BCE$ و $\triangle ADE$

داریم:

$$\left. \begin{array}{l} x = a + d \\ d = b + c \end{array} \right\} \Rightarrow x = a + b + c$$

۴۲ | فرض: $\hat{EBC}$ و $\hat{FDC}$ به ترتیب زوایای خارجی $\hat{B}$ و $\hat{D}$ در



چهارضلعی محدب $ABCD$

$$\text{حکم: } \hat{EBC} + \hat{FDC} = \hat{A} + \hat{C}$$

قطر AC را رسم می‌کنیم. بنا به زاویه خارجی

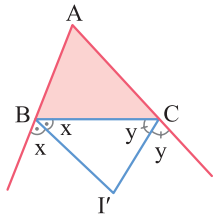
در مثلث‌های ABC و ACD داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{EBC} = \hat{A}_1 + \hat{C}_1 \\ \hat{FDC} = \hat{A}_2 + \hat{C}_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{+} \hat{EBC} + \hat{FDC} = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2) + (\hat{C}_1 + \hat{C}_2)$$

$$\Rightarrow \hat{EBC} + \hat{FDC} = \hat{A} + \hat{C}$$

۴۰ | فرض: BI' و CI' نیمسازهای خارجی زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ در مثلث ABC

حکم: $\hat{BI'C} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$



مطابق شکل داریم:

$$2x = 180^\circ - \hat{B} \Rightarrow x = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$$

$$2y = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow y = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

در مثلث $BI'C$ داریم:

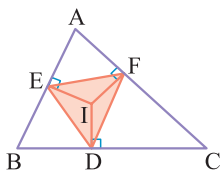
$$x + y + \hat{BI'C} = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2} + 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2} + \hat{BI'C} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{BI'C} = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$$

۴۱ | فرض: I نقطه همرسی نیمسازهای مثلث ABC و ID ، IE و IF عمود بر اضلاع

حکم: I نقطه همرسی عمودمنصف‌های $\triangle DEF$

می‌دانیم I از اضلاع ABC به یک فاصله است؛ پس $IE = IF = ID$ که نتیجه می‌دهد نقطه I در مثلث EFD از سه رأس آن به یک فاصله است، لذا I نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث DEF است.



۴۲ | فرض: نیمساز زاویه داخلی $\hat{A}$ ، نیمساز زاویه خارجی $\hat{B}$ و نیمساز زاویه خارجی $\hat{C}$ در مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

حکم: سه نیمساز فوق هم‌رسند.

نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای خارجی B و C در مثلث ABC را O می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم نیمساز زاویه A هم از O می‌گذرد. به همین جهت از O بر ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC عمود می‌کنیم. داریم:

$$\left. \begin{array}{l} O \text{ روی نیمساز زاویه خارجی } \hat{B} \Rightarrow OE = OD \\ O \text{ روی نیمساز زاویه خارجی } \hat{C} \Rightarrow OF = OD \end{array} \right\} \Rightarrow OE = OF$$

و این یعنی نقطه O از اضلاع زاویه A به یک فاصله است، پس O روی نیمساز زاویه A قرار دارد.

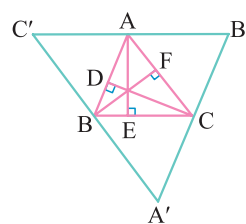
۴۳ | فرض: EH ، عمودمنصف AB و MF ، عمودمنصف AC در مثلث ABC و O نقطه تلاقی آن‌ها است.

حکم: O ، نقطه همرسی نیمسازهای زوایای مثلث AEF است.

در مثلث حاده‌الزوایای ABC ، O نقطه تلاقی عمودمنصف‌های اضلاع AB و AC ، همان نقطه همرسی عمودمنصف‌ها می‌باشد. EH عمودمنصف AB است، پس مثلث AEB متساوی‌الساقین است ($AE = BE$)، بنابراین EH نیمساز زاویه AEF است.

مطابق شکل AE ، BF و CD ، سه ارتفاع مثلث ABC هستند.

از رأس‌های مثلث ABC خط‌هایی موازی اضلاع مقابل آن رأس‌ها رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ پدید آید، داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AB' \parallel BC, AC \text{ مورب } \Rightarrow \hat{BCA} = \hat{B'AC} \\ AC = CA \\ AB \parallel B'C, AC \text{ مورب } \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{B'CA} \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{\text{(ض ز)}} \triangle ABC \cong \triangle CB'A \Rightarrow AB' = BC$$

با استدلال مشابه دو مثلث ABC و BAC' نیز به حالت (ض ز) هم‌نهشت‌اند؛ پس $AC' = BC = AB'$ و در نتیجه $AC' = BC = AB'$ و این یعنی A وسط $B'C'$ است.

$$B'C' \parallel BC, AE \perp BC \Rightarrow AE \perp B'C'$$

بنابراین AE عمودمنصف $B'C'$ است. با استدلال مشابه نتیجه می‌شود BF عمودمنصف $A'C'$ و CD عمودمنصف $A'B'$ است. از طرفی عمودمنصف اضلاع مثلث $A'B'C'$ هم‌رسند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC نیز هم‌رسند.

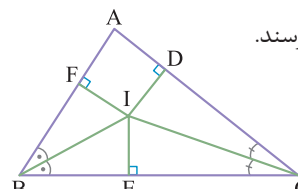
۳۸ | فرض: $\triangle ABC$ دلخواه

حکم: نیمساز زوایای $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ، هم‌رسند.

نقطه تلاقی نیمسازهای زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را

I می‌نامیم. از I بر اضلاع مثلث، عمودهای

IE ، IF و ID را رسم می‌کنیم، داریم:

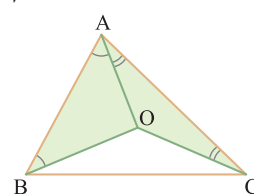


$$\left. \begin{array}{l} I \text{ روی نیمساز زاویه } \hat{B} \Rightarrow IE = IF \\ I \text{ روی نیمساز زاویه } \hat{C} \Rightarrow IF = ID \end{array} \right\} \Rightarrow IF = ID$$

و این یعنی نقطه I از دو ضلع زاویه A نیز به یک فاصله است، پس I روی نیمساز زاویه A قرار دارد، یعنی سه نیمساز زوایای داخلی مثلث ABC هم‌رسند.

۳۹ | فرض: O ، نقطه همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث ABC داخل آن است.

حکم: $\hat{BOC} = 2\hat{A}$



O را به A وصل می‌کنیم. چون O نقطه همرسی عمودمنصف‌های مثلث ABC است، پس $OA = OB = OC$ است، در نتیجه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} OA = OB \Rightarrow \hat{OBA} = \hat{OAB} \\ OA = OC \Rightarrow \hat{OCA} = \hat{OAC} \end{array} \right\}$$

$$+ \Rightarrow \hat{OBA} + \hat{OCA} = \hat{OAB} + \hat{OAC} = \hat{A}$$

اما در چهارضلعی مقعر $ABOC$ داریم:

$$\hat{BOC} = \hat{OBA} + \hat{A} + \hat{OCA} = \underbrace{\hat{OBA} + \hat{OCA}}_{\hat{A}} + \hat{A} = 2\hat{A}$$