# فهرست مطالب

## دهم


۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال ۸

۲ قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن ۵۸

۳ چندضلعی‌ها ۱۰۰

۴ تجسم فضایی ۱۶۵


## یازدهم


۱ دایره ۲۱۴

۲ تبدیل‌های هندسی و کاربردها ۲۷۴

۳ روابط طولی در مثلث ۳۲۱

# رایه

## هندسه یازدهم

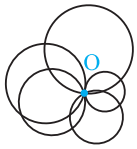
## فصل اول

# درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

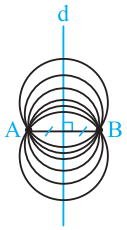
## قضیه‌های وتر و انواع زاویه

**تعریف دایره:** مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی در همان صفحه، مقدار ثابتی باشد. نقطهٔ ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره می‌گویند. $C(O,R)$ نشان‌دهندهٔ دایره‌ای به مرکز $O$ و شعاع $R$ است.

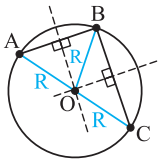
یادآوری: از یک نقطه، بی‌شمار دایره می‌گذرد.




یادآوری: از دو نقطهٔ $A$ و $B$ بی‌شماره دایره می‌گذرد و مرکز این دایره‌ها واقع بر خط $d$ عمودمنصف پاره‌خط $AB$ است.



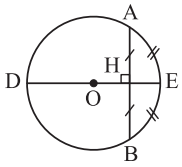

یادآوری: از هر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، یک دایره می‌گذرد که مرکز آن، نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های اضلاعِ مثلثِ تشکیل‌شده با آن سه نقطه می‌باشد و شعاع آن برابر است با فاصلهٔ مرکز دایره تا یکی از آن سه نقطه.




### چند قضیهٔ مهم

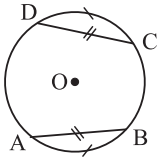
۱) در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند و خطی که مرکز دایره را به وسط یک وتر از آن دایره وصل می‌کند، بر آن وتر عمود است و برعکس. یعنی داریم:

$$\begin{cases} \overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} \\ \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DB} \\ AH = HB \end{cases} \Leftrightarrow OH \perp AB$$



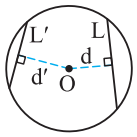

۲) در یک دایره، کمان‌های نظیر دو وتر مساوی، با هم برابرند و برعکس. یعنی داریم:

$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$



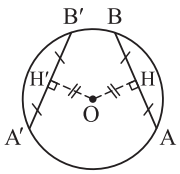

۳) در یک دایره، از دو وتر نابرابر، آن‌که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس، یعنی داریم:

$$L > L' \Leftrightarrow d < d'$$



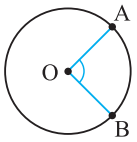

نتیجه: در هر دایره، وترهای مساوی، از مرکز دایره به یک فاصله‌اند و برعکس. یعنی داریم:

$$AB = A'B' \Leftrightarrow OH = OH'$$

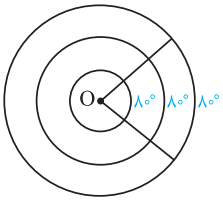



### زاویه‌های اصلی در دایره

**زاویهٔ مرکزی:** زاویه‌ای است که رأس آن مرکز دایره و اضلاع آن شعاع‌های دایره هستند. اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی برابر با اندازهٔ کمان مقابلش است: $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB}$ .

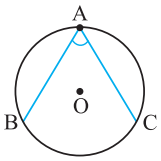


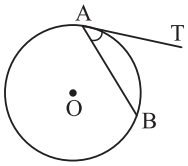

توجه کنید که رابطهٔ بالا به اندازهٔ شعاع دایره بستگی ندارد. مثلاً در شکل مقابل، کمان دایره‌هایی با شعاع مختلف، اندازه‌های برابر ولی طول‌های نابرابر دارند.




**زاویهٔ محاطی:** زاویه‌ای است که رأسش روی محیط دایره و ضلع‌هایش دو وتر از دایره باشند.

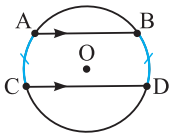
اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی برابر نصف کمان مقابلش است: $\widehat{BAC} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$ .





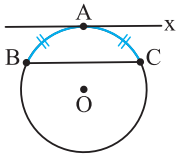

**زاویهٔ ظلی:** زاویه‌ای است که رأسش روی محیط دایره است، یک‌ضلعش وتری از دایره و ضلع دیگرش بر دایره مماس است. مانند $\widehat{TAB}$ در شکل روبه‌رو:

اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر نصف کمان مقابلش است: $\widehat{TAB}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$.




**نکته** کمان‌های محدود بین دو وتر موازی، با هم برابرند:

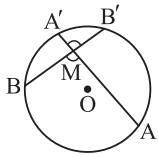
$$AB \parallel CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$




**حالت خاص:** در شکل مقابل $Ax \parallel BC$ و $Ax$ مماس بر دایره است. در این حالت نیز داریم:

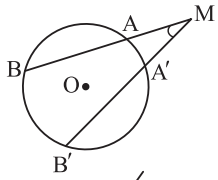
$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$$

## زوایای غیراصلی و حالت‌های خاص آن‌ها




① به زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در داخل دایره ایجاد می‌شود زاویهٔ داخلی می‌گویند و اندازهٔ آن برابر است با نصف مجموع کمان‌های محدود به دو وتر:

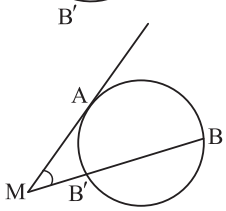
$$\widehat{M}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$




② به زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر در خارج دایره ایجاد می‌شود زاویهٔ خارجی می‌گویند و اندازهٔ آن برابر است با نصف قدرمطلق تفاضل دو کمان محدود بین دو ضلع آن زاویه:

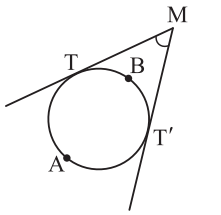
$$\widehat{M}=\frac{|\overset{\frown}{BB'}-\overset{\frown}{AA'}|}{۲}$$

**حالت خاص:**




① زاویهٔ بین یک مماس و یک قاطع برابر است با نصف قدرمطلق تفاضلِ دو کمانِ محدود بین دو ضلع آن زاویه:

$$\widehat{M}=\frac{|\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AB'}|}{۲}$$



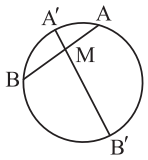

② زاویهٔ بین دو مماس بر دایره نیز برابر است با نصف قدرمطلق تفاضلِ دو کمانِ ایجادشده:

$$\widehat{M}=\frac{|\overset{\frown}{TAT'}-\overset{\frown}{TBT'}|}{۲}$$

# درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

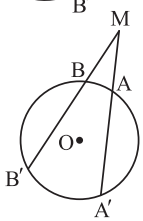
## رابطه‌های طولی، مفهوم قوت و مماس‌های مرسوم بر دایره از نقطه‌ای خارج از آن

### روابط طولی در دایره




① هرگاه دو وتر یک‌دیگر را داخل دایره قطع کنند، داریم:

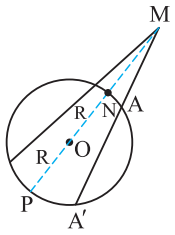
$$MA \times MB = MA' \times MB'$$




② هرگاه امتداد دو وتر یک‌دیگر را در خارج دایره قطع کنند، داریم:

$$MA \times MA' = MB \times MB'$$

**نتیجه‌گیری** در حالت خاص، اگر شکل قبل را به صورت مقابل کامل‌تر کنیم، خواهیم داشت:

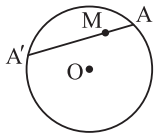



$$\mathbf{MA \times MA'} = MN \times MP = (MO - R)(MO + R) = \mathbf{MO^2 - R^2}$$

به عددی که از $MO^2 - R^2$ به دست می‌آید «قوت نقطهٔ M نسبت به دایره» گفته می‌شود که کاربرد آن بیشتر برای بررسی وضعیت نقطه نسبت به دایره است. چنان‌چه این عدد مثبت شود، نقطه بیرون دایره، چنان‌چه صفر شود، نقطه واقع بر محیط دایره و اگر منفی شود، نقطه درون دایره است. هم‌چنین برای محاسبهٔ طول پاره‌خط مماس از نقطه‌ای خارج دایره و محاسبهٔ طول کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه داخل دایره نیز می‌توان از «قوت» استفاده کرد.

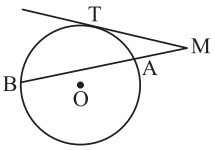
**بیان دیگری از رابطهٔ طولی «قوت»:** ضرب طول‌های دو قطعهٔ قاطعِ وارد بر دایره برابر است با مجذور فاصلهٔ نقطه تا مرکز، منهای مجذور شعاع دایره.

**تذکر** برای وضعیتی که نقطهٔ M داخل دایره قرار داشته باشد نیز رابطهٔ قبل به این صورت نوشته می‌شود:




$$\mathbf{MA \times MA' = R^2 - MO^2}$$

۳) هرگاه از نقطه‌ای خارج دایره، یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، طول مماس، واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ ایجاد شده روی قاطع است:

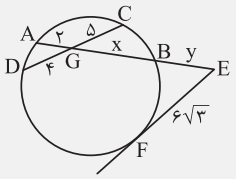



$$\mathbf{MT^2 = MA \times MB}$$

**تذکر** در این وضعیت نیز می‌توان قوت نقطهٔ M نسبت به دایره را به کمک رابطهٔ بالا چنین تعریف کرد:

$$MT^2 = MA \times MB = (MO - R)(MO + R) = MO^2 - R^2$$

**مثال** **در شکل مقابل مقدار y کدام است؟**




۱) ۶ ۲) ۷/۵

۳) ۸ ۴) ۹

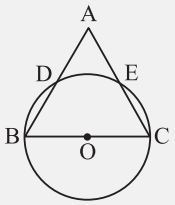
**پاسخ:** گزینهٔ (۱)

دو بار از رابطهٔ طولی در دایره استفاده می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$$AG \times GB = CG \times GD \Rightarrow ۲ \times x = ۵ \times ۴ \Rightarrow x = ۱۰$$

$$EF^2 = EB \times EA \Rightarrow (۶\sqrt{۳})^2 = y \times (y + ۱۰ + ۲) \Rightarrow y^2 + ۱۲y - ۱۰۸ = ۰ \Rightarrow (y + ۱۸)(y - ۶) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۶ \\ y = -۱۸ \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

**مثال** **در شکل مقابل، ABC مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۶ و O مرکز دایره است. حاصل AE × AC کدام است؟**




۱) ۱۸ ۲) ۱۲

۳) $۶\sqrt{۶}$ ۴) $۹\sqrt{۲}$

**پاسخ:** گزینهٔ (۱)

با توجه به نکات قبل، از رابطهٔ قوتِ دایره داریم:

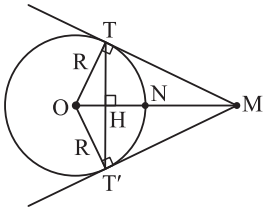
$$AE \times AC = AD \times AB = AO^2 - \underbrace{R^2}_{OC^2}$$

حال از آن‌جا که در مثلث متساوی‌الاضلاع، میانهٔ AO نقش ارتفاع را هم دارد، پس: $AO = \frac{۶\sqrt{۳}}{۲} = ۳\sqrt{۳}$ و $OC = \frac{BC}{۲} = ۳$. بنابراین:

$$AE \times AC = (۳\sqrt{۳})^2 - ۳^2 = ۱۸$$

## مماس بر دایره

هرگاه از نقطهٔ M خارج دایره، دو مماس بر دایره رسم کرده و سپس از آن به مرکز دایره وصل کنیم، نکات زیر را داریم:




۱) شعاع در نقطهٔ تماس بر خط مماس عمود است. یعنی داریم: $\hat{T} = \hat{T'} = ۹۰^\circ$.

۲) **طول مماس‌های مرسوم بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره با هم برابرند: $MT = MT'$. (بسیار مهم)**

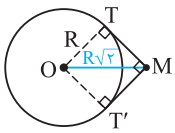
۳) پاره‌خط OM نیمساز $\hat{M}$ و $\hat{O}$ است و داریم: $\widehat{NT} = \widehat{NT'}$.

۴) پاره‌خط OM عمودمنصف $TT'$ است و کمان‌های $TT'$ و $TNT'$ را نصف می‌کند.

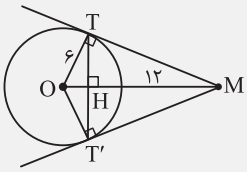
۵) از روابط طولیِ مثلث قائم‌الزاویهٔ OTM نتیجه می‌شود که:

$$\begin{cases} TH \times OM = R \times MT \\ R^۲ = OH \times OM \ , \ MT^۲ = MH \times MO \\ TT'^۲ = ۴OH \times HM \end{cases}$$

۶) در حالت خاص که دو مماسِ مرسوم بر دایره از نقطهٔ M بر هم عمود باشند، چهارضلعی $MTOT'$ مربع است و قطر آن یعنی OM برابر است با $R\sqrt{۲}$. (چرا؟)




**مثال** **از نقطهٔ M بیرون دایرهٔ $C(O,۶)$ دو مماس MT و $MT'$ را بر آن رسم کرده‌ایم. اگر $OM = ۱۲$ باشد، طول وتر $TT'$ کدام است؟**




۱) ۳ ۲) ۶

۳) $۳\sqrt{۳}$ ۴) $۶\sqrt{۳}$

**پاسخ:** گزینهٔ (۴)

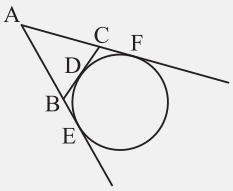
MO عمودمنصف $TT'$ است، پس $TH = T'H$. در مثلث‌های OTM و $OT'M$ طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$MT = MT' = \sqrt{OM^۲ - R^۲} = \sqrt{۱۲^۲ - ۶^۲} = \sqrt{۱۰۸} = ۶\sqrt{۳}$$

از طرفی:

رابطهٔ طولی در $\overset{\Delta}{OTM}$ : $OT \times TM = TH \times OM \Rightarrow ۶ \times ۶\sqrt{۳} = TH \times ۱۲ \Rightarrow TH = ۳\sqrt{۳} \Rightarrow TT' = ۲TH = ۶\sqrt{۳}$

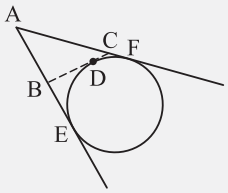
**مثال** **در شکل روبه‌رو با تغییر نقطهٔ تماس D بر روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت F و E، مساحت و محیط مثلث ABC کدام وضع را دارند؟**




۱) محیط متغیر، مساحت متغیر ۲) محیط متغیر، مساحت ثابت

۳) محیط ثابت، مساحت ثابت ۴) محیط ثابت، مساحت متغیر

**پاسخ:** گزینهٔ (۴)




از نقطهٔ C دو مماس بر دایره رسم شده است، پس $CF = CD$ (۱)؛ هم‌چنین از نقطهٔ B نیز دو مماس بر دایره رسم شده، پس $BD = BE$ (۲) و به همین ترتیب از نقطهٔ A دو مماس بر دایره رسم شده، پس $AE = AF$ (۳)

$$\text{محیط مثلث}ABC = AB + BD + DC + AC$$

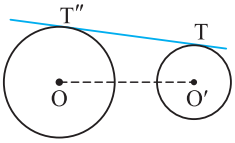
$$\overset{(۱),(۲)}{=\!=} AB + BE + CF + AC = AE + AF \overset{(۳)}{=\!=} ۲AE = ۲AF : \text{مقدار ثابت}$$

مشاهده می‌شود که مقدار محیط مثلث ثابت است و بستگی به مکان نقطهٔ D ندارد؛ ولی مساحت تغییر می‌کند و هر چه نقطهٔ D از وسط کمان EDF حرکت کند و به طرفین برود، مساحت مثلث ABC کم‌تر می‌شود.

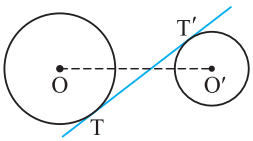
## مماس مشترک و اوضاع نسبی دایره‌ها

**مماس مشترک:** مماس مشترکِ دو دایره، خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد.

اگر دو دایره در یک طرف خطِ مماس باشند، این خط، مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خطِ مماس باشند، این خط، مماس مشترک داخلی نامیده می‌شود. $OO'$ نیز خط‌المرکزین نام دارد.



مماس مشترک خارجی
(خارج فضای بین دو دایره)



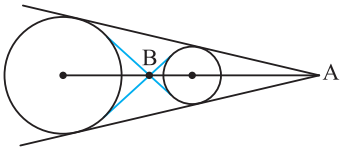
مماس مشترک داخلی
(داخل فضای بین دو دایره)

**طول مماس مشترک:** اگر $R$ و $R'$ شعاع‌های دو دایره و $d$ طول خط‌المرکزین دو دایره باشد، داریم:

$$\text{طول مماس مشترک خارجی}\ TT'' = \sqrt{d^2-(R-R')^2} \quad \text{و} \quad \text{طول مماس مشترک داخلی}\ TT' = \sqrt{d^2-(R+R')^2}$$

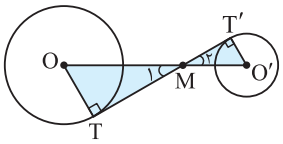
**نکات**

۱) مطابق رابطه‌ها و شکل‌های بالا، واضح است که طول مماس مشترک خارجی بیشتر از طول مماس مشترک داخلی است (مگر در یک وضعیت خاص که دایره‌ها بر یک‌دیگر مماس خارج باشند که جلوتر می‌آموزیم).




۲) مماس مشترک داخلی و خط‌المرکزین در نقطه‌ای مثل $B$ و مماس مشترک‌های خارجی و خط‌المرکزین در نقطه‌ای مثل $A$ همرس‌اند.

توجه کنید که خط‌المرکزین دو دایره، همان نیمساز زاویهٔ $A$ است.




۳) در مورد شکل مقابل، از آن‌جایی که $OT$ و $O'T'$ هر دو بر $TT'$ عمود هستند، پس $\hat{T}=\hat{T'}=90^\circ$ و زاویه‌های $M_1$ و $M_2$ نیز با هم متقابل به رأس و برابرند. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{MOT} \overset{(zz)}{\sim} \overset{\Delta}{MO'T'} \Rightarrow \frac{OT}{O'T'}=\frac{OM}{O'M}=\frac{MT}{MT'}$$

در واقع در حل تست‌ها، نسبت تناسب اضلاع به کمکمان می‌آید. هم‌چنین از قسمت چپ و وسط تناسب بالا نتیجهٔ جالبی گرفته می‌شود:

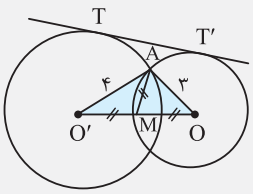
**نتیجه‌گیری** نقطهٔ همرسی خط‌المرکزین و مماس مشترک‌های داخلی (یا خارجی)، خط المرکزین (یا امتداد آن) را به نسبت شعاع‌های دو دایره تقسیم می‌کند.

**مثال** **در دو دایرهٔ متقاطع به مراکز $O$ و $O'$ و شعاع‌های ۳ و ۴ واحد، فاصلهٔ نقطهٔ تلاقی دو دایره از وسط $OO'$ برابر $\frac{1}{2}OO'$ می‌باشد. اندازهٔ مماس مشترک محدود به دو نقطهٔ تماس با این دو دایره چند واحد است؟**

ریاضی داخل ۹۰

۱) ۵ ۲) $2\sqrt{5}$

۳) $2\sqrt{6}$ ۴) ۴




**پاسخ:** گزینهٔ (۳)

طبق فرض، میانهٔ $AM$ نصف $OO'$ است؛ پس مثلث $AOO'$ قائم‌الزاویه است. بنابراین: $OO'=5$

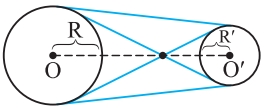
$$TT'=\sqrt{OO'^2-(R-R')^2}=\sqrt{5^2-(4-3)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

### وضعیت‌های دو دایره نسبت به هم

در وضعیت‌های زیر طول خط‌المرکزین $(OO')$ را برابر $d$ گرفته‌ایم.

**۱- متخارج**

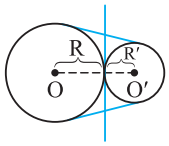
$OO'=d>R+R'$ خط‌المرکزین




در این حالت دایره‌ها ۲ مماس مشترک خارجی و ۲ مماس مشترک داخلی دارند.

### ۲- مماس خارج

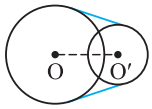
در این حالت دایره‌ها ۲ مماس مشترک خارجی و ۱ مماس مشترک داخلی دارند.




$d = R + R'$

### ۳- متقاطع

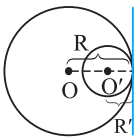
در این حالت دایره‌ها فقط ۲ مماس مشترک خارجی دارند.




$R - R' < d < R + R'$

### ۴- مماس داخل

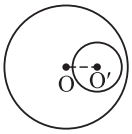
در این حالت دایره‌ها ۱ مماس مشترک خارجی دارند.




$d = |R - R'|$

### ۵- متداخل

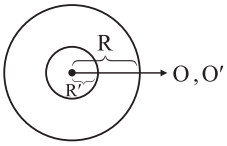
در این حالت دایره‌ها مماس مشترک ندارند.




$0 < d < |R - R'|$

### حالت خاص

هم‌مرکز

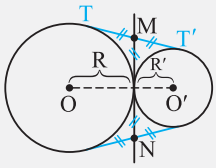



$d = 0$

**تمرین**

**الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C(O',R')$ را در حالتی که دایره‌ها مماس خارج هستند، به دست آورید.**

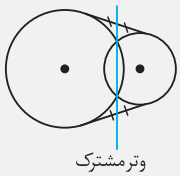
**پاسخ:**




$$\left.\begin{array}{l} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ d = R + R' \end{array}\right\} \Rightarrow TT' = \sqrt{(R + R')^2 - (R - R')^2} = \sqrt{4RR'}$$

$\Rightarrow$ **طول مماس مشترک خارجیِ دو دایرهٔ مماس خارج** $TT' = 2\sqrt{RR'}$

**نکات**



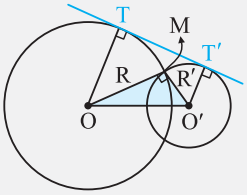

۱) ممکن است تساوی فوق را به این صورت نیز ببینید: $TT'^2 = (2R)(2R')$ یعنی «در هر دو دایرهٔ مماس خارج، مماس مشترک خارجی، واسطهٔ هندسی قطر دایره‌ها است.»

۲) در این وضعیت، مماس مشترک داخلی، مماس مشترک‌های خارجی را نصف می‌کند. به عبارت دیگر $MN = TT'$.

۳) وتری که از نقاط تقاطع دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد، وتر مشترک دو دایره نام دارد. در دو دایرهٔ متقاطع، امتداد وتر مشترک، مماس مشترک‌های خارجی را نصف می‌کند. (*تحقیق کنید چرا؟*)

**ب) اگر در دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های $R$ و $R'$، شعاع‌های گذرنده از نقاط تقاطع، بر هم عمود باشند، اندازهٔ مماس مشترک آن‌ها چه‌قدر است؟**

**پاسخ:** مطابق شکل داریم:




$$\left.\begin{array}{l} TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \\ \overset{\Delta}{OMO'} : d^2 = R^2 + R'^2 \end{array}\right\} \Rightarrow TT' = \sqrt{R^2 + R'^2 - (R^2 + R'^2 - 2RR')} = \sqrt{2RR'}$$

# درس اول: مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

## قضیه‌های وتر و انواع زاویه

سلام دوستان عزیز! حالتون خوبه؟ به قسمت تستای هندسهٔ یازدهم خوش اومدین! امیدواریم با کوله‌بار تجربه‌های گران‌بهایی که از بخش هندسهٔ دهم تقدیمتون کردیم سراغ بخش فعلی اومده باشین.

هندسهٔ یازدهم کلاً سه فصل بیشتر نداره که ما فعلاً قصد داریم تستای فصل اول اون یعنی تستای دایره رو موشکافی کنیم. البته از سالای قبل با دایره آشنایی‌هایی دارید. تو تستا قصد داریم مفاهیمی مثل «انواع زاویه در دایره، روابط طولیِ دایره، مماس مشترک و اوضاع نسبی دایره‌ها، چندضلعی‌های محاطی و محیطی و ... رو بررسی کنیم. بچه‌ها! دایره در کل فصل شیرینی هستش و ما مطمئنیم که راحت تستای این فصل رو پشت سر می‌ذارین و خُب البته این فصل در کنکور سراسری و کنکورهای آزمایشی و کلاً آزمون‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخورداره و به همین دلیل هم تعداد تست‌های بیشتری رو به نسبت بقیهٔ فصل‌ها براتون تدارک دیدیم ... به امید موفقیتتون!

این شما و این جناب دایره ...!

**۱- در مربعی به ضلع ۲ واحد، دایره‌ای به مرکز یک رأس آن و شعاع ۲/۵ واحد، دو ضلع مربع را قطع می‌کند. فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع، کدام است؟** ریاضی داخل ۹۵

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

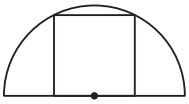
**۲- مربع ABCD به ضلع ۴ واحد مفروض است. شعاع دایرهٔ گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟** ریاضی خارج ۹۵

۱) ۲/۲۵ ۲) ۲/۵ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) ۳

**۳- مربع ABCD و دایرهٔ گذرنده بر دو رأس C و D به شعاع ۵ و مماس بر ضلع AB از مربع مفروض است. مساحت مربع چه‌قدر است؟**

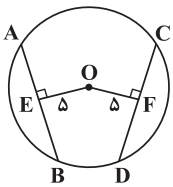
۱) ۲۵ ۲) ۳۶ ۳) ۶۴ ۴) ۱۰۰

**۴- در شکل مقابل، شعاع نیم‌دایره ۷/۵ سانتی‌متر است. مساحت مربع محاط در نیم‌دایره چند سانتی‌متر مربع است؟**



۱) ۵۴ ۲) ۳۰ ۳) ۳۶ ۴) ۴۵

**۵- در شکل مقابل O مرکز دایره است و OE و OF به ترتیب بر AB و CD عمودند به طوری‌که $OE = OF = ۵$. اگر $AE = x - ۱$ و $CD = x + ۲$، آن‌گاه طول شعاع دایره چه‌قدر است؟**

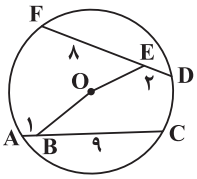



۱) $۲\sqrt{۷}$ ۲) $۴\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt{۳۴}$ ۴) ۶

**۶- در دایره‌ای به مرکز O، دو وتر $AB = ۱۸$ و $CD = ۱۲$ طوری قرار دارند که مجموع فواصل O از دو وتر ۱۵ است. شعاع دایره کدام است؟**

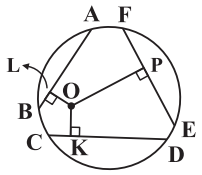
۱) $۳\sqrt{۱۳}$ ۲) $۲\sqrt{۱۳}$ ۳) $۳\sqrt{۷}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$

**۷- در شکل مقابل O مرکز دایره است. E و B نقاطی روی وترهای FD و AC هستند. اگر OB کم‌ترین مقدار صحیح خود را داشته باشد، در این صورت طول OE کدام است؟**




۱) ۴ ۲) ۵ ۳) $۳\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۷}$

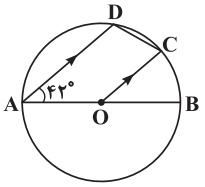
**۸- در شکل مقابل O مرکز دایره، $CD = ۳x$ و $FE = ۲x - ۳$ و $AB = ۱۲$. اگر $OP > OK > OL$، x کدام مقدار نمی‌تواند باشد؟**




۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

**۹- در یک مستطیل به طول ۱۳ و عرض ۶ واحد، دایره‌ای به قطر طول مستطیل، ضلع روبه‌روی آن را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند. فاصلهٔ این دو نقطه چند واحد است؟**

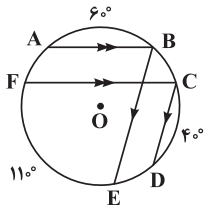
۱) ۴ ۲) $۲\sqrt{۶}$ ۳) ۵ ۴) $۴\sqrt{۲}$




۱۰- در دایرهٔ مقابل، O مرکز دایره است و شعاع OC و وتر AD موازی‌اند. اگر $\widehat{A} = ۴۲^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ C چه‌قدر است؟

۱) $۴۲^\circ$ ۲) $۶۹^\circ$

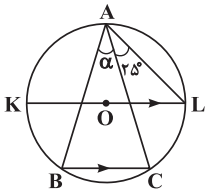
۳) $۸۴^\circ$ ۴) $۹۶^\circ$




۱۱- در شکل مقابل، اگر $AB \parallel FC$، $CD \parallel BE$، $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$، $\widehat{CD} = ۴۰^\circ$ و $\widehat{EF} = ۱۱۰^\circ$ باشد، آن‌گاه زاویهٔ $F\widehat{C}D$ چند درجه است؟

۱) ۵۵ ۲) ۷۰

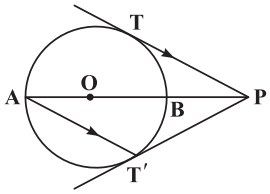
۳) ۸۰ ۴) ۹۰




۱۲- در دایرهٔ مقابل، زاویهٔ بین دو وتر AL و AC، $۲۵^\circ$ و وتر BC با قطر KL موازی است. اندازهٔ زاویهٔ α چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۳۵

۳) ۴۰ ۴) ۴۵



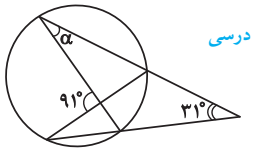

۱۳- در شکل مقابل، PT و $PT'$ بر دایره مماس‌اند، $PT \parallel AT'$ بوده و AB قطر دایره است. اندازهٔ کمان $TBT'$ چه‌قدر است؟

۱) $۳۰^\circ$

۲) $۶۰^\circ$

۳) $۹۰^\circ$

۴) $۱۲۰^\circ$

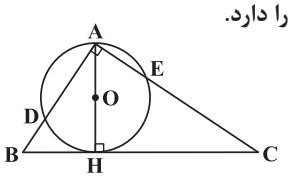



تمرین کتاب درسی

۱۴- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ α چه‌قدر است؟

۱) $۳۰^\circ$ ۲) $۳۱^\circ$

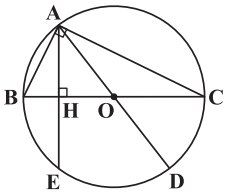
۳) $۴۵^\circ$ ۴) $۶۰^\circ$




۱۵- در شکل مقابل، ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$ نقش قطر دایره را دارد. اگر $\widehat{AD} = ۱۰۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟

۱) $۸۰^\circ$ ۲) $۶۰^\circ$

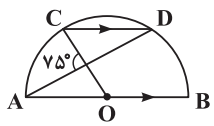
۳) $۵۰^\circ$ ۴) $۴۰^\circ$




۱۶- مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\widehat{A} = ۹۰^\circ)$ و دایرهٔ محیطی آن را در نظر بگیرید. ارتفاع وارد بر وتر این مثلث، دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ E قطع می‌کند. اگر نقطهٔ D انتهای دیگر قطر گذرا از رأس A و $\widehat{ED} = ۸۰^\circ$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ C کدام است؟

۱) $۶۵^\circ$ ۲) $۴۵^\circ$

۳) $۲۵^\circ$ ۴) $۵^\circ$

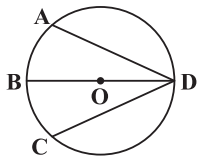



تمرین کتاب درسی

۱۷- در شکل مقابل، O مرکز نیم‌دایره و $AB \parallel CD$ است. اندازهٔ کمان CD چه‌قدر است؟

۱) $۲۵^\circ$ ۲) $۴۰^\circ$

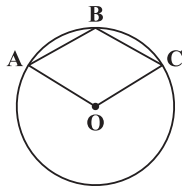
۳) $۷۵^\circ$ ۴) $۸۰^\circ$




۱۸- در دایرهٔ شکل مقابل، O مرکز دایره و قطر BD نیمساز زاویهٔ $A\widehat{D}C$ است. اگر $AD = ۳x - ۷$ و $CD = x + ۱$ باشد، اندازهٔ AD کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵

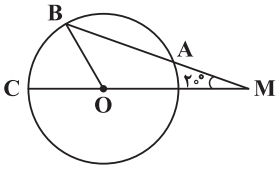
۳) ۶ ۴) ۷




۱۹- نقطهٔ O مرکز دایره و چهارضلعی ABCO لوزی است. اندازهٔ کمان $\widehat{ABC}$ چند درجه است؟

۱) ۶۰ ۲) ۹۰

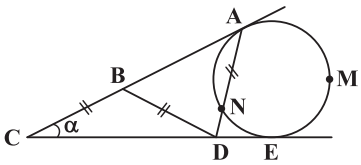
۳) ۱۲۰ ۴) ۱۳۵




۲۰- در شکل مقابل، از نقطهٔ M خارج دایره به شعاع R، خطی چنان رسم کرده‌ایم که دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده است و داریم $MA = R$ و $\widehat{M} = ۲۰^\circ$. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی BOC چه‌قدر است؟ تمرین کتاب درسی

۱) $۳۰^\circ$ ۲) $۴۰^\circ$

۳) $۴۵^\circ$ ۴) $۶۰^\circ$



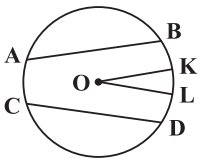

۲۱- در شکل مقابل داریم $BC = BD = AD$ و $\widehat{C} = \alpha$. مقدار $\widehat{AME} - \widehat{NE}$ چه‌قدر است؟

۱) $۲\alpha$

۲) $۴\alpha$

۳) $۶\alpha$

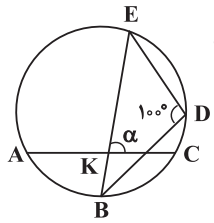
۴) $۸\alpha$




۲۲- در شکل مقابل O مرکز دایره، اندازهٔ $\widehat{BKD} = ۸۰^\circ$ و اندازهٔ $\widehat{AC} = ۶۰^\circ$ است. اگر شعاع‌های OK و OL به ترتیب با وترهای AB و CD موازی باشند، زاویهٔ KOL چند درجه است؟

۱) ۲۰ ۲) ۱۵

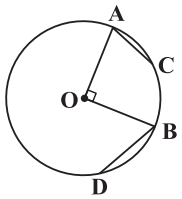
۳) ۱۰ ۴) ۵




۲۳- در دایرهٔ مقابل، B وسط کمان کوچک $\widehat{AC}$ است. اگر $\widehat{EDB} = ۱۰۰^\circ$ باشد، آن‌گاه $\widehat{EKC} = \alpha$ چند درجه است؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰

۳) ۷۰ ۴) ۸۰




۲۴- در دایرهٔ مقابل دو شعاع OA و OB بر هم عمودند. اگر طول کمان‌های AC و BD برابر باشند، آن‌گاه امتداد وترهای AC و BD با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

۱) $۳۰^\circ$

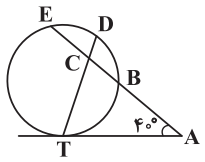
۲) $۴۵^\circ$

۳) $۶۰^\circ$

۴) $۹۰^\circ$

۲۵- در یک دایره دو وترِ عمود بر هم، چهار کمان بر دایره پدید می‌آورند. اگر اندازه‌های دو کمان از چهار کمان مزبور $۳۰^\circ$ و $۸۰^\circ$ باشند، اندازهٔ تفاضل دو کمان دیگر برحسب درجه کدام است؟

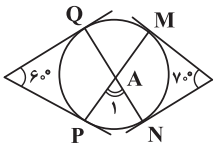
۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰




۲۶- در شکل مقابل AT بر دایره مماس است و $\widehat{ED} = \widehat{BD}$، اگر $\widehat{TAE} = ۴۰^\circ$ باشد، $\widehat{ECD}$ کدام است؟

۱) $۶۰^\circ$ ۲) $۷۰^\circ$

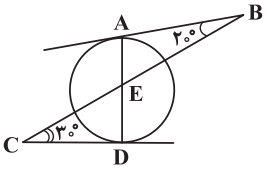
۳) $۸۰^\circ$ ۴) $۹۰^\circ$




۲۷- در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ $A_1$ چند درجه است؟ تمرین کتاب درسی

۱) ۶۰ ۲) ۶۵

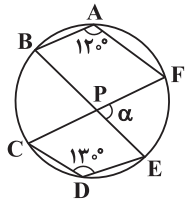
۳) ۷۰ ۴) ۷۵




۲۸- در شکل مقابل، نیم‌خط‌های AB و CD بر دایره مماس هستند. اگر $\widehat{B} = ۲۰^\circ$ و $\widehat{C} = ۳۰^\circ$، آن‌گاه اندازهٔ $\widehat{BED}$ چه‌قدر است؟

۱) $۱۰۵^\circ$ ۲) $۱۱۰^\circ$

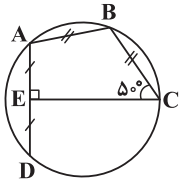
۳) $۱۱۵^\circ$ ۴) $۱۲۵^\circ$




**۲۹- در شکل مقابل، $B\hat{A}F = ۱۲۰^\circ$ و $C\hat{D}E = ۱۳۰^\circ$، زاویهٔ حادهٔ بین دو وتر BE و CF چه‌قدر است؟**

۱) $۷۰^\circ$ ۲) $۷۵^\circ$

۳) $۸۰^\circ$ ۴) $۸۵^\circ$



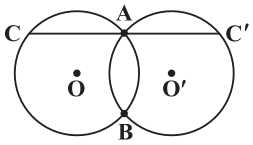

**۳۰- در دایرهٔ شکل مقابل، دو وتر BC و AB برابر بوده و $B\hat{C}E = ۵۰^\circ$ است. پاره‌خط CE بر وتر AD عمود است و آن را نصف می‌کند. اندازهٔ زاویهٔ $D\hat{A}B$ کدام است؟**

۱) $۱۲۰^\circ$

۲) $۱۱۰^\circ$

۳) $۱۰۰^\circ$

۴) $۱۳۰^\circ$



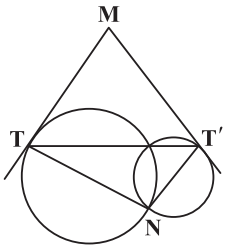

**۳۱- در شکل مقابل، دو دایرهٔ مساوی متقاطع‌اند. قاطع $CAC'$ را رسم می‌کنیم. مثلث $CBC'$ همواره ..... است.**

۱) متساوی‌الاضلاع

۲) قائم‌الزاویه

۳) متساوی‌الساقین

۴) قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین




**۳۲- در شکل مقابل، MT و $MT'$ بر دایره مماس‌اند و $\hat{N} = ۱۱۰^\circ$، زاویهٔ M چند درجه است؟**

۱) ۵۵

۲) ۶۰

۳) ۷۰

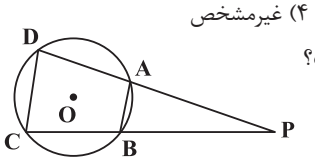
۴) ۹۰

**۳۳- دو دایرهٔ متقاطع در نقطهٔ A مشترک‌اند. خط گذرا بر A دو دایرهٔ مفروض را در B و C قطع می‌کند. مماس‌ها بر هر دایره در B و C در نقطهٔ M متقاطع‌اند. در مثلث MBC با چرخش خط قاطع، کدام جزء ثابت می‌ماند؟** ریاضی خارج ۹۴

۱) MA ۲) محیط ۳) مساحت ۴) زاویهٔ BMC

**۳۴- در مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ نقطهٔ O در امتداد AC مرکز دایره‌ای است که در نقطهٔ B بر ضلع AB مماس است. امتداد BC این دایره را در D قطع کرده است. مثلث OCD چگونه است؟** ریاضی داخل ۹۴

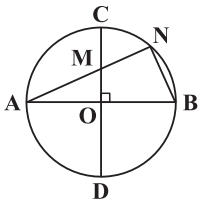
۱) متساوی‌الساقین ۲) قائم‌الزاویه ۳) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۴) غیرمشخص




**۳۵- در شکل مقابل، اگر R شعاع دایره، $AB = R$ و $CD = R\sqrt{۲}$ باشد، اندازهٔ زاویهٔ P چند درجه است؟**

۱) ۱۵ ۲) ۲۰

۳) ۱۲/۵ ۴) ۲۵




**۳۶- در شکل مقابل، دو قطر AB و CD بر هم عمود هستند و داریم $MN = NB$. اندازهٔ کمان BN کدام است؟**

۱) $۲۲/۵^\circ$

۲) $۳۰^\circ$

۳) $۴۵^\circ$

۴) $۶۰^\circ$

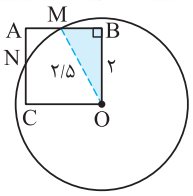
**۳۷- در دایرهٔ C به مرکز O، AB قطر و M وسط کمان AB است. نقطهٔ F روی قطر DM طوری قرار دارد که $MF = MB$. اگر H نقطهٔ برخورد امتداد BF با دایره باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ HMF چه‌قدر است؟**

۱) $۱۵^\circ$ ۲) $۲۲/۵^\circ$ ۳) $۳۰^\circ$ ۴) $۴۵^\circ$

**۳۸- در یک دایره به مرکز O، شعاع OA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ B بر مماس دلخواه دایره عمود BD را فرود می‌آوریم. اگر $A\hat{D}B = ۳۴^\circ$ باشد، زاویهٔ OAD چند درجه است؟** ریاضی داخل ۹۴

۱) ۶۸ ۲) ۷۳ ۳) ۱۰۲ ۴) ۱۴۶

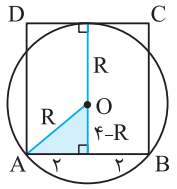
# پاسخ‌های تشریحی




**۱** **۲** پس از رسم شکل، متوجه قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOM می‌شویم و چنین می‌نویسیم:

$$BM = NC = \sqrt{(۲/۵)^۲ - ۲^۲} = \frac{۳}{۲}$$

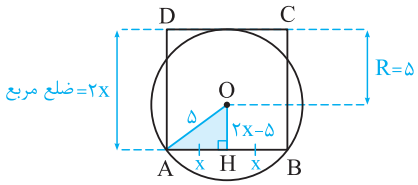
فاصلهٔ نزدیک‌ترین رأس مربع تا نقطهٔ تقاطع $AM = AN = AB - BM = ۲ - \frac{۳}{۲} = \frac{۱}{۲}$




**۲** **۲** از درسنامه آموختیم که قطرِ عمود بر هر وتر، آن وتر را نصف می‌کند. حال مانند تست قبل، این بار در مثلث رنگی از قضیهٔ فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$R^۲ = (۴ - R)^۲ + ۲^۲ \Rightarrow R^۲ = ۱۶ + R^۲ - ۸R + ۴ \Rightarrow R = \frac{۲۰}{۸} = ۲/۵$$

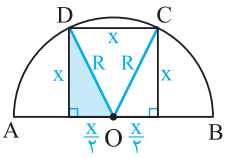
**۳** **۳** *دوستان گل!* دقت کنید که در این شکل، مراکز مربع و دایره بر یک‌دیگر منطبق نیستند. با توجه به اندازه‌های روی شکل و به کمک قضیهٔ فیثاغورس چنین می‌نویسیم:




$$\overset{\Delta}{AOH}: x^۲ + (۲x - ۵)^۲ = ۵^۲ \Rightarrow x^۲ + ۴x^۲ - ۲۰x + ۲۵ = ۲۵ \Rightarrow ۵x^۲ - ۲۰x = ۰$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x - ۴) = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غ‌ق‌ق} \\ x = ۴ \Rightarrow S_{ABCD} = (۲x)^۲ = ۶۴ \end{cases}$$

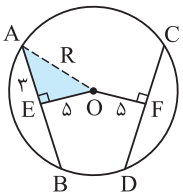



**۴** **۴** از مرکز نیم‌دایره به D و C وصل می‌کنیم و از رابطهٔ فیثاغورس کمک می‌گیریم:

$$x^۲ + \left(\frac{x}{۲}\right)^۲ = R^۲ \Rightarrow \frac{۵x^۲}{۴} = R^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۴}{۵}R^۲$$

$$\xrightarrow{R=۷/۵} S_{\text{مربع}} = x^۲ = \frac{۴ \times ۷/۵ \times ۷/۵}{۵} = ۴۵$$

**۵** **۳** با توجه به این‌که $OE = OF = ۵$، یعنی فاصلهٔ مرکز دایره از دو وتر یکسان است، پس دو وتر برابرند. بنابراین:

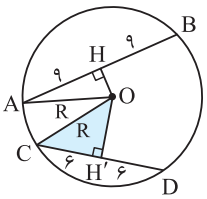



$$\underbrace{AB}_{۲AE} = CD \Rightarrow ۲x - ۲ = x + ۲ \Rightarrow x = ۴ \Rightarrow AE = x - ۱ = ۳$$

حال از O به A وصل می‌کنیم. داریم:

$$\overset{\Delta}{OEA}: R = \sqrt{۵^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۳۴}$$

**۶** **۱** از O به A و C وصل می‌کنیم. داریم:

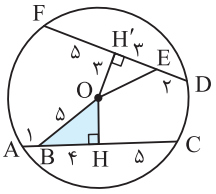



$$\left.\begin{array}{l} \overset{\Delta}{OHA}: OH^۲ = R^۲ - ۸۱ \quad (۱) \\ \overset{\Delta}{OH'C}: OH'^۲ = R^۲ - ۳۶ \quad (۲) \end{array}\right\} \xrightarrow{(۲)-(۱)} OH'^۲ - OH^۲ = ۴۵ \Rightarrow (OH' - OH)\underbrace{(OH' + OH)}_{۱۵} = ۴۵$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH' - OH = ۳ \\ OH' + OH = ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} \begin{cases} OH' = ۹ \\ OH = ۶ \end{cases} \Rightarrow \overset{\Delta}{OH'C}: R^۲ = OH'^۲ + ۳۶$$

$$\Rightarrow R^۲ = ۸۱ + ۳۶ = ۱۱۷ \Rightarrow R = ۳\sqrt{۱۳}$$

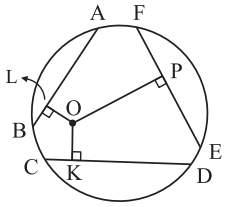
**۷** **۳** با توجه به این‌که $FD = AC = ۱۰$، پس مرکز (O) از دو وتر به یک فاصله است و OH و OH′ وترها را نصف می‌کنند. پس:




$$AH = \frac{AC}{۲} = ۵ \Rightarrow BH = ۴$$

از طرفی در $\overset{\Delta}{OHB}$، $\hat{H} = ۹۰^\circ$ پس $OB > BH$، یعنی $OB > ۴$. در نتیجه کم‌ترین مقدار صحیح OB، ۵ است. پس در $\overset{\Delta}{OHB}$، $OH = ۳$ که برابر OH′ است (زیرا $AC = FD = ۱۰$) و در نهایت در $\overset{\Delta}{OH'E}$، $EH' = ۳$ و $OH' = ۳$، پس $OE = ۳\sqrt{۲}$.

gajmarket.com

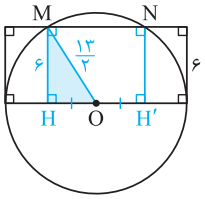



**۸** **۴** با توجه به این‌که از دو وتر نابرابر، وتری بزرگ‌تر است که به مرکز دایره نزدیک‌تر باشد و بالعکس، می‌توان نوشت:

$$OP > OK > OL \Rightarrow FE < AB < CD$$

$$\Rightarrow ۲x - ۳ < ۱۲ < ۳x \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۳ < ۱۲ \\ ۳x > ۱۲ \end{cases} \Rightarrow x < ۷/۵ \text{ و } x > ۴$$

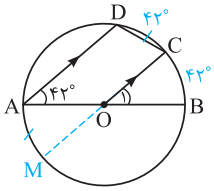
یعنی $۴ < x < ۷/۵$. بنابراین x نمی‌تواند ۸ باشد.




**۹** **۳** از مرکز دایره به M یا N وصل می‌کنیم. داریم:

$$\overset{\Delta}{MOH} : HO = \sqrt{\left(\frac{۱۳}{۲}\right)^۲ - ۶^۲} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴}} = \frac{۵}{۲}$$

$$MN = HH' = ۲HO = ۵$$

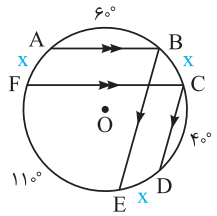



**۱۰** **۲** شعاع OC را از سمت O امتداد می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند. با توجه به توازی AD و MC و این‌که کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره برابرند، داریم:

$$\hat{A} = ۴۲^\circ \text{ , } AD \| OC \text{, مورب } AB \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۴۲^\circ = \overset{\frown}{BC} \xrightarrow{\overset{\frown}{DCB} = ۸۴^\circ} \overset{\frown}{CD} = ۴۲^\circ$$

$$\xrightarrow{AD \| CM} \overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{CD} = ۴۲^\circ \quad (۱)$$

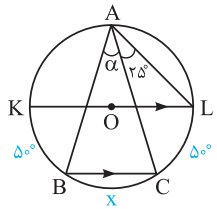
از طرفی: $\overset{\frown}{AD} = ۱۸۰^\circ - ۸۴^\circ = ۹۶^\circ \xrightarrow{(۱)} \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{AM}}{۲} = \frac{۹۶^\circ + ۴۲^\circ}{۲} = ۶۹^\circ$




**۱۱** **۳** کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در یک دایره برابرند، پس می‌توان نوشت: $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{BC}, \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{ED} = x$

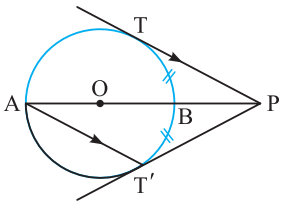
$$\underbrace{\overset{\frown}{AF}}_{x} + ۶۰^\circ + \underbrace{\overset{\frown}{BC}}_{x} + ۴۰^\circ + \underbrace{\overset{\frown}{ED}}_{x} + ۱۱۰^\circ = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳x = ۱۵۰^\circ \Rightarrow x = ۵۰^\circ$$

زاویهٔ محاطی $F\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{ED}}{۲} = \frac{۱۱۰^\circ + ۵۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$



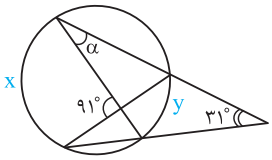

**۱۲** **۳** چون قطر KL با وتر BC موازی است در نتیجه کمان‌های محصور بین آن‌ها مساوی‌اند. یعنی $\overset{\frown}{BK} = \overset{\frown}{CL}$ و چون زاویهٔ $C\hat{A}L$ محاطی روبه‌رو به کمان CL است، بنابراین $\overset{\frown}{CL} = ۲C\hat{A}L = ۵۰^\circ$. از طرفی می‌دانیم KL قطر است، پس $\overset{\frown}{KB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CL} = ۱۸۰^\circ$ و چون $\overset{\frown}{KB} + \overset{\frown}{CL} = ۱۰۰^\circ$، لذا $\overset{\frown}{BC} = ۸۰^\circ$ و در نهایت چون $B\hat{A}C$ محاطی روبه‌رو به $\overset{\frown}{BC}$ است. بنابراین:

$$B\hat{A}C = \alpha = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = ۴۰^\circ$$



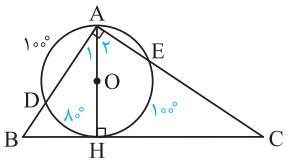

**۱۳** **۴** با توجه به این‌که PT و PT′ بر دایره مماس‌اند، پس AP کمان $\overset{\frown}{TBT'}$ را نصف می‌کند. از طرفی کمان‌های محصور بین یک مماس و یک وترِ موازی آن، با هم برابرند. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{TB} = \overset{\frown}{T'B} \\ \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TBT'} = \overset{\frown}{TB} + \overset{\frown}{T'B} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AT} = ۲\overset{\frown}{TB} \\ \overset{\frown}{AT} + \overset{\frown}{TB} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳\overset{\frown}{TB} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TB} = ۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{TBT'} = ۲ \times ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$




**۱۴** **۱** از تعریف زاویه‌های غیراصلی یعنی زاویهٔ حاصل از برخورد دو وتر و زاویهٔ حاصل از برخورد امتداد دو وتر در دایره کمک می‌گیریم و چنین می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x+y}{۲} = ۹۱^\circ \Rightarrow x + y = ۱۸۲^\circ \\ \frac{x-y}{۲} = ۳۱^\circ \Rightarrow x - y = ۶۲^\circ \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} \Rightarrow ۲y = ۱۲۰^\circ \Rightarrow y = ۶۰^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{y}{۲} = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$




**۱۵** **۴**

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\frown}{AD} = ۱۰۰^\circ \\ \overset{\frown}{ADH} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\frown}{DH} = ۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۴۰^\circ \Rightarrow \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{EH} = ۱۰۰^\circ$$

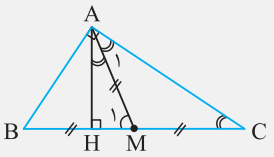
$$\hat{C} = \frac{\overset{\frown}{ADH} - \overset{\frown}{EH}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - ۱۰۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

البته به طرز ساده‌تری هم می‌توان به جواب رسید، زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم: $\hat{C} = \hat{A}_۱ = ۴۰^\circ$.

**۱۶** | **۳**

**نیم‌نگاه**

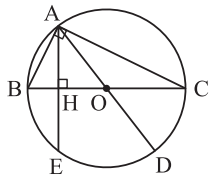
در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰)$ زاویهٔ بین ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر برابر است با: $H\hat{A}M=|\hat{B}-\hat{C}|$




**اثبات**

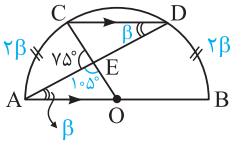
$\overset{\Delta}{AHM}: H\hat{A}M=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+\hat{M}_۱)=۱۸۰^\circ-(۹۰^\circ+\hat{A}_۱+\hat{C})$

$\overset{\hat{A}_۱=\hat{C}}{=\!=\!=}\ ۹۰^\circ-۲\hat{C}=\hat{B}+\hat{C}-۲\hat{C}=\hat{B}-\hat{C}$




$$\left.\begin{array}{l} H\hat{A}D=\dfrac{\overset{\frown}{ED}}{۲}=۴۰^\circ \xlongequal{\text{طبق کادر نیم‌نگاه}} \hat{B}-\hat{C} \\ \text{از طرفی}: \hat{B}+\hat{C}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow ۲\hat{B}=۱۳۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۶۵^\circ \Rightarrow \hat{C}=۲۵^\circ$$

**۱۷** | **۴**



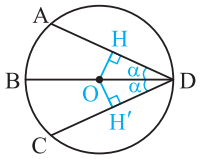

$$\left.\begin{array}{l} (\text{محاطی})\hat{D}=\beta \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=۲\beta \Rightarrow (\text{مرکزی})\hat{O}=۲\beta \\ \text{از طرفی}: \quad CD\|AB, \text{مورب } AD \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}=\beta \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AOE}: \hat{A}+\hat{O}=۱۸۰^\circ-۱۰۵^\circ$$

$\Rightarrow \beta+۲\beta=۷۵^\circ \Rightarrow \beta=۲۵^\circ$

می‌دانیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی در دایره با یک‌دیگر برابرند. پس می‌توان نوشت:

$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=۱۸۰^\circ-(۲\times\underbrace{\overset{\frown}{AC}}_{۲\beta})=۱۸۰^\circ-(۴\times۲۵^\circ)=۸۰^\circ$

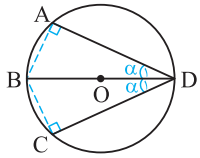
**۱۸** | **۲**




**روش اول:** با توجه به این‌که هر نقطه روی نیمساز، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است، از O مرکز دایره بـر AD و CD عمود می‌کنیم و چنین می‌نویسیم:

$OH=OH' \Rightarrow HD=H'D \xRightarrow{\times۲} AD=CD \Rightarrow ۳x-۷=x+۱ \Rightarrow ۲x=۸$

$\Rightarrow x=۴ \Rightarrow AD=۳x-۷=۵$

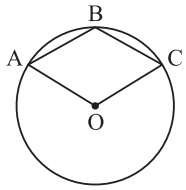



**روش دوم:** اگر از A و C به B وصل شود، می‌توان چنین نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} \text{محاطی روبه‌رو به قطر } \hat{A}=\hat{C}=۹۰^\circ \\ \hat{D}_۱=\hat{D}_۲=\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABD}\cong\overset{\Delta}{BCD} \ (\text{وتر و یک زاویهٔ حاده})$$

$\Rightarrow AD=CD \Rightarrow \cdots$ (مانند روش اول)

**۱۹** | **۳**

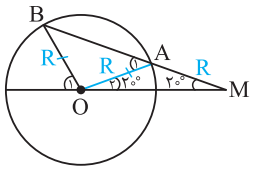



تمام فرزندان متوازی‌الاضلاع (مستطیل، مربع و لوزی) مانند خودش دارای زوایای مقابلِ مساوی هستند. پس می‌توان چنین نوشت:

لوزی $ABCO \Rightarrow (\text{محاطی})\hat{B}=\hat{O}(\text{مرکزی}) \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\overset{\frown}{ABC} \quad (۱)$

محیط دایره: از طرفی $=\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{ABC}=۳۶۰^\circ \xRightarrow{(۱)} ۲\overset{\frown}{ABC}+\overset{\frown}{ABC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow ۳\overset{\frown}{ABC}=۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=۱۲۰^\circ$

**۲۰** | **۴**



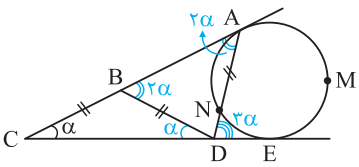

**سرنخ** از O به A وصل کنید!

$OA=AM=R \Rightarrow \hat{O}_۲=\hat{M}=۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM}$ خارجی $\hat{A}_۱=۲\hat{M}=۴۰^\circ$

از طرفی: $OB=OA=R \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱=۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OBM}$ خارجی $\hat{O}_۱=\hat{B}+\hat{M}=۴۰^\circ+۲۰^\circ=۶۰^\circ$

**نتیجه** در حالت کلی تو شکل قبل اگه $AM=R$، اون وقت همیشه داریم: $\hat{O}_۱=۳\hat{M}$.

**۲۱** | **۳**




**راهنمایی:** از تعریف زاویهٔ خارجی کمک بگیرینو بعدش سراغ اندازهٔ زاویهٔ غیراصلی C برید!

$\overset{\Delta}{BCD}$ زاویهٔ خارجی $A\hat{B}D=\hat{C}+B\hat{D}C=۲\alpha$

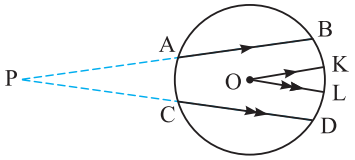
$\overset{\Delta}{ABD}$ متساوی‌الساقین: $B\hat{A}D=A\hat{B}D=۲\alpha$

$\overset{\Delta}{ACD}$ زاویهٔ خارجی $A\hat{D}E=\hat{C}+D\hat{A}C=\alpha+۲\alpha=۳\alpha$

$A\hat{D}E=۳\alpha=\dfrac{\overset{\frown}{AME}-\overset{\frown}{NE}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AME}-\overset{\frown}{NE}=۶\alpha$

gajmarket.com

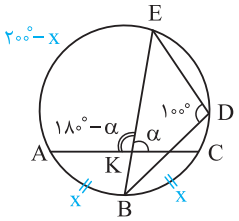
**۲۲** **۳** سرنخ *وتر AB رو از سمت A و وتر CD رو از سمت C امتداد بدین تا همو تو یه نقطه قطع کنن!* چون $OK \parallel AB$ و $OL \parallel CD$، پس زاویهٔ $K\hat{O}L$ با زاویهٔ بین امتدادهای دو وتر AB و CD برابر است.




اگر نقطهٔ تلاقی امتدادهای این دو وتر را P بنامیم، داریم:

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{BKD} - \overset{\frown}{AC}}{۲} = \frac{۸۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۱۰^\circ$$

**۲۳** **۱** با توجه به شکل داریم:

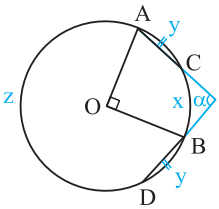



$$E\hat{D}B = ۱۰۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BAE} = ۲۶۰^\circ$$

$$\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{BC} = x \quad (۱) \Rightarrow \overset{\frown}{AE} = ۲۶۰^\circ - x \quad (۲)$$

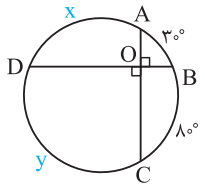
از طرفی: $۱۸۰^\circ - \alpha = \frac{\overset{\frown}{AE} + \overset{\frown}{BC}}{۲} \Rightarrow ۱۸۰^\circ - \alpha \overset{(۱),(۲)}{=\!=} \frac{۲۶۰^\circ - x + x}{۲} = ۱۳۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۵۰^\circ$

**۲۴** **۴** ابتدا وترهای AC و BD را امتداد می‌دهیم تا یک‌دیگر را در نقطه‌ای خارج دایره قطع کنند. حال می‌توان به کمک تعریف زاویهٔ اصلیِ مرکزی O و زاویهٔ غیراصلیِ α چنین نوشت:



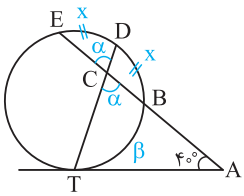

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{O} = x + y = ۹۰^\circ \\ \text{از طرفی}: z + y = ۲۷۰^\circ \end{array}\right\} \overset{(-)}{\Longrightarrow} z - x = ۱۸۰^\circ \\ \text{از طرفی}: \alpha = \frac{z - x}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

**۲۵** **۳** دو کمان $۳۰^\circ$ و $۸۰^\circ$ باید مجاور باشند و نمی‌توانند روبه‌روی هم باشند (*چرا؟*). بنابراین:




$$\left.\begin{array}{l} A\hat{O}D = \frac{x + ۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow x + ۸۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۰۰^\circ \\ A\hat{O}B = \frac{y + ۳۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ \Rightarrow y + ۳۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow y = ۱۵۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y - x = ۱۵۰^\circ - ۱۰۰^\circ = ۵۰^\circ$$

**۲۶** **۲** سرنخ *به اندازهٔ زاویهٔ غیراصلی C و زاویهٔ ظلی ATD توجه کنین!*

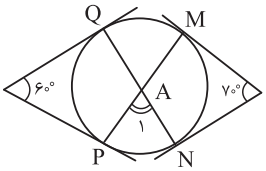



$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{BT} + \overset{\frown}{ED}}{۲} = \frac{x + \beta}{۲} \quad (۱)$$

$$\text{ظلی}\ A\hat{T}D = \frac{\overset{\frown}{DBT}}{۲} = \frac{x + \beta}{۲} \overset{(۱)}{=\!=} \alpha$$

$$\overset{\Delta}{CAT}: \alpha + \alpha + ۴۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha = ۷۰^\circ$$

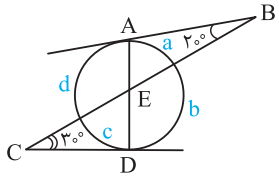
**۲۷** **۲** سرنخ *به روابط زوایای غیر اصلی $۶۰^\circ$ و $۷۰^\circ$ دقت کنین!*




$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} ۶۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{QMP} - \overset{\frown}{QP}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{QMP} - \overset{\frown}{QP} = ۱۲۰^\circ \\ \text{از طرفی}: \overset{\frown}{QMP} + \overset{\frown}{QP} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \overset{\text{حل}}{\Longrightarrow} ۲\overset{\frown}{QP} = ۲۴۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{QP} = ۱۲۰^\circ \\ \left.\begin{array}{l} ۷۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{MQN} - \overset{\frown}{MN}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{MQN} - \overset{\frown}{MN} = ۱۴۰^\circ \\ \text{از طرفی}: \overset{\frown}{MQN} + \overset{\frown}{MN} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\} \overset{\text{حل}}{\Longrightarrow} ۲\overset{\frown}{MN} = ۲۲۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{MN} = ۱۱۰^\circ \end{array}\right\}$$

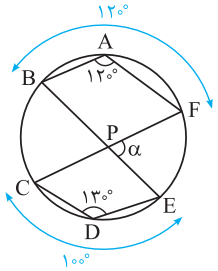
$$\Rightarrow Q\hat{A}P = \frac{\overset{\frown}{QP} + \overset{\frown}{MN}}{۲} = \frac{۱۲۰^\circ + ۱۱۰^\circ}{۲} = ۱۱۵^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۱۱۵^\circ = ۶۵^\circ$$

**۲۸** **۳** پس از نام‌گذاری کمان‌های روی شکل چنین می‌نویسیم:



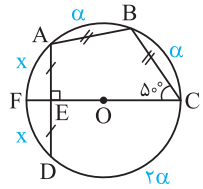

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \hat{B} = \frac{\hat{d} - \hat{a}}{۲} = ۲۰^\circ \Rightarrow \hat{d} - \hat{a} = ۴۰^\circ \\ \hat{C} = \frac{\hat{b} - \hat{c}}{۲} = ۳۰^\circ \Rightarrow \hat{b} - \hat{c} = ۶۰^\circ \end{array}\right\} \overset{+}{\Longrightarrow} \hat{b} + \hat{d} - \hat{a} - \hat{c} = ۱۰۰^\circ \\ \text{از طرفی}: \hat{b} + \hat{d} + \hat{a} + \hat{c} = ۳۶۰^\circ \end{array}\right\}$$

$$\overset{+}{\Longrightarrow} ۲(\hat{b} + \hat{d}) = ۴۶۰^\circ \Rightarrow \hat{b} + \hat{d} = ۲۳۰^\circ \Rightarrow B\hat{E}D = \frac{\hat{b} + \hat{d}}{۲} = \frac{۲۳۰^\circ}{۲} = ۱۱۵^\circ$$



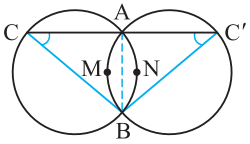

**۲۹** **۱** اندازهٔ کمان روبه‌رو به $B\hat{A}F$، $۲۴۰^\circ$ است. پس $\overset{\frown}{BAF} = ۳۶۰^\circ - ۲۴۰^\circ = ۱۲۰^\circ$ (۱). از طرفی اندازهٔ کمان روبه‌رو به $C\hat{D}E$، $۲۶۰^\circ$ است. پس $\overset{\frown}{CDE} = ۳۶۰^\circ - ۲۶۰^\circ = ۱۰۰^\circ$ (۲). از سوی دیگر $\alpha$ زاویهٔ بین دو وتر دایره است. بنابراین: (۳) $\alpha = \frac{\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EF}}{۲}$. در نهایت می‌توان نوشت:

$$\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{EF} \overset{(۱),(۲)}{=\!=} ۳۶۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۱۰۰^\circ) = ۱۴۰^\circ \Rightarrow \alpha \overset{(۳)}{=\!=} \frac{۱۴۰^\circ}{۲} = ۷۰^\circ$$

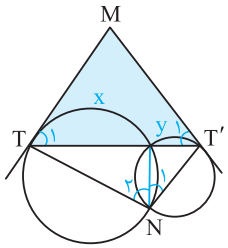



**۳۰** **۱** با توجه به این‌که CE، AD را نصف می‌کند و بر آن عمود هم است، پس قطرِ دایره محسوب می‌شود و امتداد آن، کمان AD را نیز نصف می‌کند. یعنی $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{DF} = x$ و چون $\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{AC} = ۱۸۰^\circ$ (CF قطر)، پس $\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DF} = ۱۸۰^\circ$. یعنی $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AC}$. حال از آن‌جا که $B\hat{C}F$ محاطی است، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} ۲\alpha + x = ۱۸۰^\circ \\ \overset{\frown}{BF} = \alpha + x = ۲\hat{C} = ۱۰۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = ۸۰^\circ \Rightarrow D\hat{A}B = \frac{۳\alpha}{۲} = \frac{۳ \times ۸۰^\circ}{۲} = ۱۲۰^\circ$$




**۳۱** **۳** زاویه‌های C و C′ به‌ترتیب روبه‌روی کمان‌های ANB و AMB هستند. از آن‌جا که این دو کمان روبه‌رو به یک وتر (AB) هستند و شعاع‌های دو دایره نیز برابرند، پس کمان‌ها با هم برابرند که در نتیجه $\hat{C} = \hat{C}'$. یعنی مثلث $CBC'$ همواره متساوی‌الساقین است.



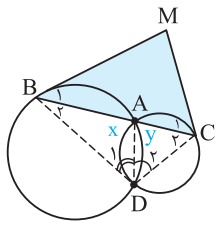

**۳۲** **۳** **راهنمایی:** *نقاط تقاطع دو دایره رو به هم وصل کنین. $\hat{N}_۱$ و $\hat{N}_۲$ محاطی‌اند. حواستون باشه که باید از رابطهٔ زاویهٔ ظلی برای $\hat{T}_۱$ و $\hat{T}'_۱$ هم استفاده کنین.*

$$(\text{محاطی})\hat{N}_۱ = \frac{y}{۲}\ ,\ (\text{محاطی})\hat{N}_۲ = \frac{x}{۲} \Rightarrow \hat{N}_۱ + \hat{N}_۲ = \frac{x+y}{۲} \overset{\text{طبق فرض}}{=\!=} ۱۱۰^\circ \quad (۱)$$

$$\text{از طرفی}: (\text{ظلی})\hat{T}_۱ = \frac{x}{۲}\ ,\ (\text{ظلی})\hat{T}'_۱ = \frac{y}{۲} \Rightarrow \hat{T}_۱ + \hat{T}'_۱ = \frac{x+y}{۲} \overset{(۱)}{=\!=} ۱۱۰^\circ$$

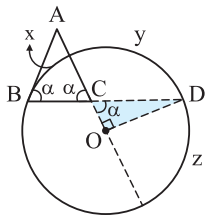
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{MTT'}: \hat{M} = ۱۸۰^\circ - ۱۱۰^\circ = ۷۰^\circ$$

**۳۳** **۴** **راهنمایی:** *از B و C به D و از D به A وصل کنین. چون می‌خوایم برای حل تست از زوایای جدید به وجود اومده کمک بگیریم.*



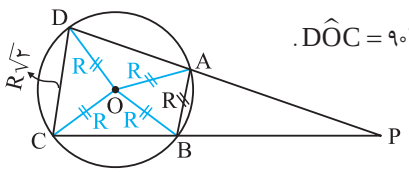

$$\left.\begin{array}{l} (\text{ظلی})\hat{B}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \hat{D}_۱(\text{محاطی}) \\ (\text{ظلی})\hat{C}_۱ = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} = \hat{D}_۲(\text{محاطی}) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Longrightarrow} \underbrace{\hat{B}_۱ + \hat{C}_۱}_{۱۸۰^\circ - \hat{M}} = \underbrace{\hat{D}_۱ + \hat{D}_۲}_{\hat{D}} \Rightarrow \hat{M} = ۱۸۰^\circ - \hat{D} = \hat{B}_۲ + \hat{C}_۲ = \frac{x+y}{۲}$$

با چرخش قاطع، رئوس B و C جابه‌جا می‌شوند؛ ولی در هر صورت کمان AD را رؤیت می‌کنند و با توجه به ثابت بودن مقادیر کمان‌های x و y، پس در اندازهٔ $\hat{D} = \hat{C}_۲ + \hat{B}_۲$ تغییری ایجاد نمی‌شود. بنابراین $B\hat{M}C$ ثابت می‌ماند.




**۳۴** **۲** با تجربهٔ حل سؤالات قبل حتماً متوجه شده‌اید که زوایای ظلی و غیر اصلی (زاویهٔ حاصل از برخورد دو وتر یا امتداد دو وتر) بسیار مهم هستند و به محض دیدنِ آن‌ها باید اندازه‌هایشان را محاسبه کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (\text{ظلی})B = \alpha = \frac{x+y}{۲} \\ \hat{C} = \alpha = \frac{x+z}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow y = z \\ \text{از طرفی}: y + z = \text{نصف محیط دایره} = ۱۸۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow y = z = ۹۰^\circ \Rightarrow \overset{\Delta}{OCD} \text{ قائم‌الزاویه است.}$$



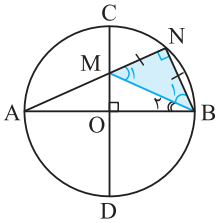

**۳۵** **۱** از O به C، D، A و B وصل می‌کنیم. مثلث AOB متساوی‌الاضلاع است. پس $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$. یعنی $\overset{\frown}{AB} = ۶۰^\circ$. از طرفی مثلث DOC قائم‌الزاویه است (زیرا $R^۲ + R^۲ = (R\sqrt{۲})^۲$)، پس $D\hat{O}C = ۹۰^\circ = \overset{\frown}{CD}$.

در نتیجه:

$$\hat{P} = \frac{\overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۹۰^\circ - ۶۰^\circ}{۲} = ۱۵^\circ$$

gajmarket.com

**۳۶** ۳ سرنخ *از M به B وصل کنین و نوع مثلث MNB رو مشخص کنین. اندازهٔ زاویه‌های این مثلث به شما کمک می‌کنه.*

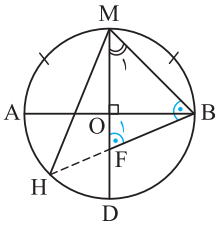



$$\left.\begin{array}{l}\text{محاطی روبه‌روی قطر دایره } \hat{N}=۹۰^\circ \\ \text{(طبق فرض) } MN=NB\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{B}_۱=۴۵^\circ \quad (۱)$$

از طرفی M روی عمودمنصف AB (یعنی CD) واقع است. $\Rightarrow AM=MB \Rightarrow \hat{A}=\hat{B}_۲$

$$\overset{\Delta}{AMB}\text{ خارجی } \hat{M}_۱=\hat{A}+\hat{B}_۲=۲\hat{A} \overset{(۱)}{=\!=} ۴۵^\circ \Rightarrow \hat{A}=۲۲/۵^\circ \Rightarrow \widehat{NB}=۲\times ۲۲/۵^\circ=۴۵^\circ$$

**۳۷** ۲ نقطهٔ M وسط کمان AB و DM قطر دایره است. پس $\widehat{AM}=\widehat{MB}=\widehat{BD}=\widehat{AD}=۹۰^\circ$. اما:

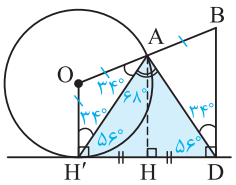



$$\hat{M}_۱=\frac{\widehat{BD}}{۲}=\frac{۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{MFB}: \hat{F}_۱=\hat{B}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{M}_۱}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۴۵^\circ}{۲}=\frac{۱۳۵^\circ}{۲}=۶۷/۵^\circ$$

$$\overset{\Delta}{MHF}\text{ زاویهٔ خارجی } \hat{F}_۱=H\hat{M}F+\underbrace{\hat{H}}_{\frac{\widehat{MB}}{۲}} \Rightarrow ۶۷/۵^\circ=H\hat{M}F+۴۵^\circ \Rightarrow H\hat{M}F=۲۲/۵^\circ$$

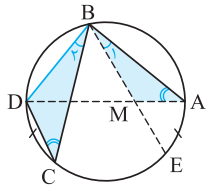
**۳۸** ۳ **راهنمایی:** *از A عمود AH و بعدش از O عمود OH′ رو بکشین و از A هم به H′ وصل کنین.*




طبق قضیهٔ تالس، هر نسبتی که A روی OB ایجاد کرده باشد، H نیز روی H′D ایجاد خواهد کرد. بنابراین HD = H′H و از آن‌جا که در $\overset{\Delta}{ADH'}$ ارتفاع، نقش میانه را هم دارد، پی به متساوی‌الساقین بودن آن می‌بریم. (۱)

$$\left.\begin{array}{l}A\hat{D}B=۳۴^\circ \Rightarrow A\hat{D}H \overset{(۱)}{=\!=} A\hat{H'}H=۵۶^\circ \Rightarrow H'\hat{A}D=۱۸۰^\circ-(۲\times ۵۶^\circ)=۶۸^\circ \\ OH'=OA=R \Rightarrow O\hat{H'}A=O\hat{A}H'=۳۴^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow O\hat{A}D=۳۴^\circ+۶۸^\circ=۱۰۲^\circ$$

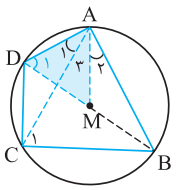
**۳۹** ۲ **راهنمایی:** *سعی کنین دو مثلث متشابه پیدا کنین که تو نسبت تشابهشون، از پاره‌خط‌های فرض و حکم سؤال استفاده شه. (یعنی از AB، BC و AM استفاده شه.)*




ابتدا از B به D وصل می‌کنیم تا مثلث BCD پدید آید. حال چنین می‌نویسیم:

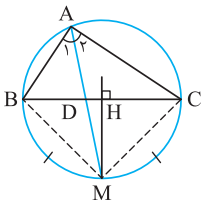
$$\left.\begin{array}{l}\text{(محاطی) } \hat{A}=\hat{C}=\frac{\widehat{BD}}{۲} \\ \widehat{AE}=\widehat{CD} \Rightarrow \hat{B}_۱=\hat{B}_۲=\frac{\widehat{AE}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMB} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{CDB} \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AM}{CD} \Rightarrow \frac{۶}{۸}=\frac{AM}{۳} \Rightarrow AM=\frac{۱۸}{۸}=۲/۲۵$$

**۴۰** ۱ مانند سؤال قبل سعی می‌کنیم دو مثلث متشابه پیدا کنیم که در نسبت تشابهِ آن‌ها از پاره‌خط‌های فرضِ سؤال (یعنی BC و AD) استفاده شود.




$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \xrightarrow{+\hat{A}_۳} D\hat{A}M=B\hat{A}C \\ \hat{C}_۱=\hat{D}_۱=\frac{\widehat{AB}}{۲}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{AMD} \overset{(زز)}{\sim} \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{AD}{AC}=\frac{DM}{BC} \Rightarrow AD.BC=AC.DM$$

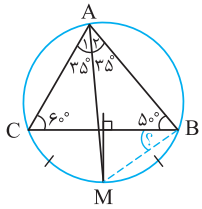
**۴۱** ۳ نکته *نقطهٔ تلاقی نیمساز هر زاویه و عمودمنصف ضلع مقابل به اون، روی دایرهٔ محیطی مثلثه.*




اگر دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کنیم، امتداد نیمساز AD دایرهٔ محیطی را در M قطع می‌کند و داریم:

M روی عمودمنصف BC نیز واقع است. $\Rightarrow BM=CM \Rightarrow \widehat{BM}=\widehat{CM} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \Rightarrow$ نیمساز AD

**۴۲** ۳ تکرار می‌کنیم که عمودمنصف یک ضلع مثلث و نیمساز زاویهٔ مقابل به آن ضلع، یک‌دیگر را روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع می‌کنند. داریم:




$$\hat{A}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۵۰^\circ)=۷۰^\circ \xrightarrow{\text{نیمساز } AM} \hat{A}_۱=۳۵^\circ \Rightarrow \widehat{CM}=۲\times ۳۵^\circ=۷۰^\circ$$

$$\text{از طرفی: (محاطی) } M\hat{B}C=\frac{\widehat{CM}}{۲}=\frac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$$