



$$x^2 + y^2 - 2x = 24 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 = 24 \\ \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow O(1,0), R=5, O'(3,0)$$

$$OO' = \sqrt{(3-1)^2 + 0} = 2 \Rightarrow OO' = R - R' \\ \Rightarrow 2 = 5 - R' \Rightarrow R' = 3 \text{ یا } 2 = R' - 5 \Rightarrow R' = 7$$

$$C' \text{ معادله دایره } : (x-3)^2 + y^2 = 9 \text{ یا } (x-3)^2 + y^2 = 49$$

$$x + 3y = 0 \Rightarrow x = -3y$$

بنابراین اگر در معادله دایره $x = -3y$ قرار دهیم، باید معادله ریشه مضاعف داشته باشد. داریم:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0 \Rightarrow 9y^2 + y^2 + 6y + 4y + a = 0$$

$$\Rightarrow 10y^2 + 10y + a = 0 \Rightarrow y^2 + y + \frac{a}{10} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 1 - 4 \times 1 \times \frac{a}{10} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{4}{10}a = 0 \Rightarrow \frac{4}{10}a = 1 \Rightarrow a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۱۰۳

$$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow O(1,0), R=2$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9 \Rightarrow O'(1,-2), R'=3$$

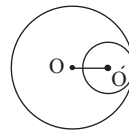
$$d = OO' = \sqrt{(1-1)^2 + (-2-0)^2} = 2, R + R' = 5, R - R' = 1$$

$$R - R' = 1 < OO' = 2 < R + R' = 5$$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

$$OO' = R - R' \text{ داریم: } OO' = R - R'$$

۱۰۲



درس بیضی و سهمی

سؤالات امتحانی درس سوم

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

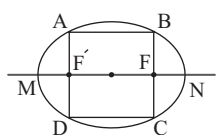
۱۰۴. اگر ۲a، ۲b و ۲c به ترتیب قطرهای بزرگ، کوچک و فاصله کانونی بیضی باشد داریم: $a^2 = b^2 + c^2$. ☐ درست ☐ نادرست
۱۰۵. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با یک باشد بیضی تبدیل به دایره می‌شود. ☐ درست ☐ نادرست
۱۰۶. اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس شود، زاویه MF و MF' با خط d برابرند (F و F' کانون‌ها هستند). ☐ درست ☐ نادرست
۱۰۷. در معادله سهمی $y^2 = -4ax$ ، کانون $(-a, 0)$ و خط هادی $x = a$ می‌باشد. ☐ درست ☐ نادرست
۱۰۸. در سهمی با کانون F و خط هادی d، مرکز هر دایره که از F بگذرد و بر خط d مماس باشد، روی سهمی است. ☐ درست ☐ نادرست

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱۰۹. در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۲a و ۲b و فاصله کانونی ۲c، خروج از مرکز برابرست با
۱۱۰. در بیضی با قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۲a و ۲b و فاصله کانونی ۲c، فاصله، طول وتر کانونی برابرست با
۱۱۱. اگر خروج از مرکز بیضی برابر با باشد، بیضی تبدیل به دایره می‌شود.
۱۱۲. در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اگر B سر قطر کوچک باشد و F و F' رأس‌های کانونی، زاویه FBF' برابرست با
۱۱۳. در سهمی $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ معادله خط هادی برابرست با
۱۱۴. سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که
۱۱۵. بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که
۱۱۶. در بیضی به طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۲a و ۲b و فاصله کانونی ۲c، فاصله دورترین و نزدیک‌ترین نقاط بیضی از کانون‌ها برابرست با
۱۱۷. اگر دو خط موازی d و d'، سهمی را در وترهای AB و A'B' قطع کنند، خط گذرنده بر وسط AB و A'B' با موازی است.

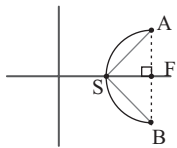
گزینه درست را انتخاب کنید.

۱۱۸. نقاط $F(3,1)$ و $F'(3,-3)$ کانون‌های یک بیضی هستند. اگر طول قطر کوچک این بیضی ۶ باشد، طول قطر بزرگ آن چقدر است؟
 (۱) $\sqrt{13}$ (۲) $2\sqrt{13}$ (۳) ۹ (۴) ۱۲
۱۱۹. نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر با ۴ می‌باشد. اگر F کانون بیضی باشد، زاویه $\widehat{FMF'}$ کدام است؟
 (۱) 60° (۲) 120° (۳) 90° (۴) 45°
۱۲۰. در مثلث ABC ، اندازه ضلع BC ثابت است و محیط مثلث داده شده است. مکان هندسی رأس A کدام است؟
 (۱) خط (۲) سهمی (۳) دایره (۴) بیضی
۱۲۱. معادله سهمی که $S(1,2)$ رأس و $F(1,-2)$ کانون آن باشد کدام است؟
 (۱) $x^2 = -16y$ (۲) $(y-2)^2 = -16(x-1)$ (۳) $(x-1)^2 = -16(y-2)$ (۴) $y^2 = -16x$
۱۲۲. در سهمی $x^2 + y = 4x$ ، معادله خط هادی کدام است؟
 (۱) $y = \frac{15}{14}$ (۲) $y = \frac{17}{4}$ (۳) $y = \frac{9}{2}$ (۴) $y = \frac{7}{2}$
۱۲۳. مختصات رأس سهمی که کانون آن $F(3,5)$ و معادله خط هادی آن $x = -3$ باشد، کدام است؟
 (۱) $(-3, 3)$ (۲) $(-3, 5)$ (۳) $(0, 5)$ (۴) $(3, 0)$
- به سؤالات زیر پاسخ کامل دهید.
۱۲۴. با استفاده از تعریف سهمی، معادله سهمی را بنویسید که کانون آن نقطه $F(2,1)$ و خط هادی آن $x = 4$ باشد. (هماهنگ خارج از کشور - تیر ۹۲)
۱۲۵. معادله سهمی را بنویسید که کانون آن $F(2,3)$ و $x = 4$ خط هادی آن باشد. (هماهنگ کشوری - شهریور ۹۰)
۱۲۶. اگر $F = (\sqrt{6}, 1)$ و $F' = (-\sqrt{6}, 1)$ دو کانون یک بیضی و طول قطر بزرگ آن ۶ باشد، طول قطر کوچک بیضی را محاسبه کنید. (هماهنگ کشوری - دی ۸۶)
۱۲۷. m و n را چنان تعیین کنید که نقطه $S = (-1, 2)$ رأس سهمی $x = y^2 + my + n$ باشد. (هماهنگ کشوری - دی ۸۶)
۱۲۸. مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی به معادله $x^2 - 4x - 8y - 4 = 0$ را به دست آورید. (اسفند ۸۶ - جبرانی)
۱۲۹. معادله سهمی را بنویسید که $F(5,3)$ کانون و $S(1,3)$ رأس آن باشد. (اردیبهشت ۸۷)
۱۳۰. طول قطرهای بیضی را بیابید که نقاط $F(2,-2)$ و $F'(-4,-2)$ کانون‌های آن و خروج از مرکز آن $\frac{3}{5}$ می‌باشد. (بوشهر - دی ۹۶)
۱۳۱. سهمی به کانون $F(3,2)$ و خط هادی به معادله $x = -1$ ، محور x ها را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A تا کانون سهمی را مشخص کنید. (بهارستان - اردیبهشت ۹۵)
۱۳۲. بیضی بر ۴ خط به معادلات $x = -1$ و $x = 7$ و $y = 2$ و $y = 12$ مماس می‌باشد. مختصات کانون‌ها و خروج از مرکز بیضی را بیابید. (تهران - دی ۹۵)
۱۳۳. مکان هندسی مراکز دایره‌هایی را بیابید که از نقطه $A(0,3)$ گذشته و بر خط $x = 4$ مماس باشد. (مازندران - اردیبهشت ۹۴)
۱۳۴. اگر $y = 2$ محور تقارن یک سهمی باشد که از دو نقطه $A(0,4)$ و $B(3,-2)$ می‌گذرد، آن‌گاه معادله خط هادی این سهمی و معادله سهمی را بنویسید. (تهران - اردیبهشت ۹۵)
۱۳۵. محل برخورد محور تقارن سهمی $y^2 - 4y + 4x - 4 = 0$ و خط هادی آن را بیابید. (تهران - دی ۹۴)
۱۳۶. در شکل مقابل مساحت مستطیل $ABCD$ برابر با ۸ می‌باشد. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{1}{4}$ باشد، اندازه قطر بزرگ بیضی را بیابید. (تهران - دی ۹۴)
۱۳۷. فرض کنید مبدأ مختصات رأس یک سهمی است محور تقارن آن موازی محور x ها است و از نقطه $(4,-1)$ می‌گذرد، معادله خط هادی آن کدام است؟ (تایباد - دی ۹۴)





۱۳۸. طول وتر کانونی سهمی به معادله $y^2 - 4y - 4x = 8$ را بیابید. (رشت - خرداد ۹۳)
۱۳۹. دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 = 2$ و $x^2 + y^2 = 8$ هم مرکز با بیضی، یکی از داخل و دیگری از بیرون بر بیضی مماسند. خروج از مرکز بیضی چقدر است؟ (سنندج - خرداد ۹۳)
۱۴۰. نقاط A و B روی محیط بیضی حرکت می‌کنند. اگر کمترین و بیشترین فاصله این دو نقطه به ترتیب ۴ و ۱۲ باشد، خروج از مرکز بیضی را بیابید. (مشهد - اردیبهشت ۹۳)
۱۴۱. مرکز یک بیضی نقطه $(-1, 3)$ بوده و بر محورهای مختصات مماس است. فاصله کانونی و خروج از مرکز بیضی را بیابید. (شیراز - اردیبهشت ۹۳)
۱۴۲. کانون‌های یک بیضی $F(9, 2)$ و $F'(1, 2)$ و خروج از مرکز آن $\frac{8}{9}$ می‌باشد. از انتهای دو قطر آن مماس‌هایی بر بیضی رسم می‌کنیم. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد این مماس‌ها را بیابید. (کرمان - ۹۱)
۱۴۳. کانون سهمی $x^2 - 4x = y + 4m$ به مختصات $F(n, \frac{33}{4})$ می‌باشد. $m + n$ چقدر است؟ (تهران - ۹۲)
۱۴۴. در سهمی به معادله $3y^2 + 6x - 4y = 0$ خط گذرنده از کانون و موازی خط هادی، منحنی سهمی را در نقاط A و B قطع می‌کند. اندازه وتر AB چقدر است؟ (تهران - ۹۲)
۱۴۵. در سهمی شکل زیر، که معادله آن $y^2 + my - 10x + n = 0$ است، F کانون و S رأس سهمی است. مطلوبست مساحت مثلث SAB. (تهران - ۹۱)

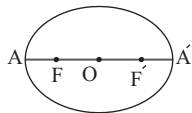


پاسخ

۱۱۴. از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشند.

۱۱۵. فاصله‌شان از دو نقطه یک مقدار ثابت است.

۱۱۶. $a - c$ نزدیک‌ترین $A'F'$ و $a + c$ دورترین AF'



۱۱۷. محور تقارن سهمی

۱۱۸. گزینه «۲»

$$FF' = 2c = \sqrt{(3-3)^2 + (-3-1)^2} = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 9 + 4 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13} \Rightarrow 2a = 2\sqrt{13}$$



۱۱۹. گزینه «۳»

$$\begin{cases} 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \\ 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \end{cases} \Rightarrow c^2 = 5^2 - 3^2 \Rightarrow c = 4$$

در مثلث FMF'، میانه OM، نصف ضلع FF' می‌باشد، پس مثلث

در رأس M قائمه می‌باشد یعنی $\widehat{FMF'} = 90^\circ$.

۱۰۴. درست

۱۰۵. نادرست - اگر $e = \frac{c}{a} = 0$ شود آن گاه $c = 0$ و $a^2 = b^2 + 0$ در نتیجه $a = b$ شده؛ یعنی بیضی به دایره تبدیل می‌شود.

۱۰۶. درست

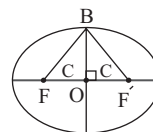
۱۰۷. درست

۱۰۸. درست - زیرا هر نقطه روی سهمی از F و d به یک فاصله است.

$$e = \frac{c}{a} \quad 109$$

$$\frac{2b^2}{a} \quad 110$$

۱۱۱. صفر



۱۱۲. 120°

$$2a = 2 \times 2b \Rightarrow a = 2b$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 3b^2 \Rightarrow c = \sqrt{3}b$$

$$\Delta BOF': \tan \widehat{OBF'} = \frac{c}{b} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{OBF'} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{FBF'} = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$

$$y = -a + k \quad 113$$